

THÈSE

présentée

A L'UNIVERSITÉ PAUL-SABATIER DE TOULOUSE
(SCIENCES)

pour obtenir

le GRADE de DOCTEUR ès SCIENCES PHYSIQUES

par

Pierre SEGUR

Attaché de Recherche au C. N. R. S.

Étude théorique d'un gaz
faiblement ionisé
soumis à un champ électrique
uniforme et constant

Soutenue le 18 Septembre 1974, devant la commission d'examen :

MM. Daniel BLANC

Président

E. DURAND

J.-L. DELCROIX

J. DUTTON

G.-L. BRAGLIA

} Examinateurs



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546613_0022

THÈSE

présentée

A L'UNIVERSITÉ PAUL-SABATIER DE TOULOUSE
(SCIENCES)

pour obtenir

le GRADE de DOCTEUR ès SCIENCES PHYSIQUES

par

Pierre SEGUR

Attaché de Recherche au C. N. R. S.

Étude théorique d'un gaz
faiblement ionisé
soumis à un champ électrique
uniforme et constant

Soutenue le 18 Septembre 1974, devant la commission d'examen :

MM. Daniel BLANC

Président

E. DURAND

J.-L. DELCROIX

J. DUTTON

G.-L. BRAGLIA

} Examineurs

THÈSE

présentée

A L'UNIVERSITÉ PAUL SABATIER DE TOULOUSE
PAR

M. Pierre SEGUIER

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES PHYSIQUES

sur

Pierre SEGUIER

Docteur en Sciences Physiques



Étude théorique d'un gaz

faiblement ionisé

soumis à un champ électrique

uniforme et constant

Soutenue le 12 Septembre 1974 devant la commission d'examen

MM. DUBOIS BLANC	
E. GUARD	
J.-L. DELCROIX	
J. BOUTON	
G.J. BEAUCHA	

UNIVERSITE PAUL SABATIER

TABLEAU DU PERSONNEL SCIENCES

DIRECTION DE L'UNIVERSITE

M. LARENG	Président
M. MATHIS	1er Vice-Président
M. MARTIN	2ème Vice-Président

U.E.R. SCIENTIFIQUES

HONORARIAT

M. BEDOS	Professeur honoraire
M. BI AIZOT	Doyen honoraire
M. CAPDECOMME	Doyen honoraire, Recteur honoraire correspondant de l'Institut
M. DIEHL	Professeur honoraire
M. DUPOUY	Membre de l'Institut, Doyen honoraire, Directeur Général honoraire du C.N.R.S., Professeur honoraire
M. DURAND Emile	Doyen honoraire
M. ESCANDE	Professeur honoraire, Membre de l'Institut
M. GAUSSEN	Professeur honoraire, Correspondant de l'Institut
M. JACQUES	Professeur honoraire
M. MASDUPUY	Professeur honoraire
M. MATHIS	Doyen honoraire
M. MIGNONAC	Professeur honoraire
M. MOROQUER	Professeur honoraire, Correspondant de l'Institut
M. SECONDAT	Professeur honoraire
M. TEISSIE-SOLIER	Professeur honoraire
M. VANDEL	Professeur honoraire, Membre de l'Institut

PROFESSEURS

M. CASTERAS	Géologie, Correspondant de l'Institut
M. CAPDECOMME	Minéralogie, Correspondant de l'Institut
M. NOUVEL	Biologie Générale
M. GALLAIS	Chimie, Membre de l'Institut
M. DURAND Emile	Physique
M. FERT	Physique
M. LESBRE	Chimie Organique
M. HURON	Mathématiques Appliquées
M. MARGULIS	Pédologie
M. TRICHE	Chimie Analytique et Spectrographie
M. LEDOUX	Zoologie Appliquée
M. RIVALS	Agriculture
M. PERRIER	Physique
M. MATHIS	Chimie
M. ORLIAC	Géochimie et Minéralogie
M. LAFOURCADE	Physique
M. ANGE LIER	Ecologie
Mlle de FERRE	Botanique
M. FARRAN	Minéralogie et Géotechnique
M. LAUDET	Physique Théorique et Calcul Numérique
M. SERFATY	Biologie Animale
M. LAGASSE	Electrotechnique
M. BLANC	Physique Nucléaire
M. LEREDDE	Botanique
M. LELUBRE	Géologie
M. TROCHAIN	Botanique
M. LALAGUE	Mathématiques Générales
M. BOUIGUE	Astronomie
M. COUCHET	Physique
M. ASSELINEAU	Chimie Biologique
M. MAURET	Chimie Systématique
M. AGID	Physiologie

M. MONTANT	Cryptogamie
M. GAUTIER	Physique
M. CRUMEYROLLE	Mathématiques
M. GOURINARD	Géologie
M. PULOU	Minéralogie
M. CAMBOU	Physique Spatiale
M. LACOSTE	Electrotechnique
M. THIBAUT	Mécanique Rationnelle et Appliquée
M. MASCART	Mathématiques
M. MEDIONI	Psychophysiologie
M. RAYNAUD Pierre	Physiologie Animale
M. ZALTA	Chimie Biologique
M. SEVELY	Electrotechnique
M. POMMIEZ	Mathématiques
M. REY Paul	Biologie Végétale
M. COULOMB	Physique
M. TRINQUIER	Physique
M. MARONI	Chimie
M. BEETSCHEN	Biologie Générale
M. DERACHE	Physiologie Animale
M. SATGE	Chimie Organique
M. LATTES	Chimie
M. VEDRENNE	Géophysique
M. DURAND-DE LGA	Géologie
M. CARRARA	Physique
M. JE ANNIN	Chimie Minérale
M. MAHENC	Chimie
M. MIROUZE	Géologie
M. BITSCH	Zoologie
M. DEGEILH	Physique
M. MARTIN J.C.	Génie Electrique
M. REY Gérard	Electronique, Electrotechnique, Automatique

PROFESSEURS ASSOCIES

M. ANDERSON	Physique Spatiale
-------------------	-------------------

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M. PICCA	Physique
M. MERIC	Mathématiques Appliquées
Mme LECAL	Zoologie
M. PILOD	Physique
M. LARROQUE	Physique
M. BARRANS	Chimie
Mlle LAPEYRE	Mathématiques - Informatique
M. BERTRAND	Chimie
M. DESQ	Mathématiques
M. ROCARD	Electronique
M. POILBLANC	Chimie
M. TOUZE	Physiologie Végétale
M. FRASNAY	Mathématiques
M. CASSAGNAU	Zoologie
M. GUERIN	Mathématiques
M. PESCIA	Physique
M. SOUQUET	Géologie
M. SCHNEIDER	Biologie Cellulaire
M. SICARD	Biologie Génétique
M. de LOTH	Chimie Physique
M. SAPORTE	Physique
M. PERENNOU	Informatique
M. THENOZ	Génie Civil
M. CAUSSINUS	Mathématiques Appliquées
M. DURAND Ph.	Physique
M. CASTAN	Informatique
M. REME	Mesures Physiques

M. FONTAN Physique Nucléaire
M. BAUDRAS Chimie Biologique
M. CALVET Mécanique des Fluides
M. PAGANI Physique
M. BEAUFILS Informatique
M. BERTHELEMY Zoologie
M. TERJANIAN Mathématiques

MAITRES DE CONFERENCES

M. ATTEIA Mathématiques
M. CUPPENS Mathématiques
Mlle BARBANCE Mathématiques
M. VERDIER Physique
M. GILLY Génie Mécanique
M. COTTU Génie Mécanique
M. ROUTIE Génie Chimique
M. MARAL Physique
M. HURAU Physique
M. LEGRAND Génie Civil
M. ABATUT Electronique, Electrotechnique, Automatique
M. SOTIROPOULOS Chimie Organique
Mme GERVAIS Chimie Inorganique
M. BONEL Chimie
M. MAUSS Mécanique
M. BANCEL Mathématiques
M. JOSSEBRAND Mesures Physiques
M. BETOURNE Informatique
M. CAMPAN Psychophysiologie
M. CLERC Mécanique
M. GRIFONE Mathématiques
M. ETTINGER Mathématiques
M. LETAC Mathématiques
M. BONNET Louis Biologie
M. LOUARN Génétique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

M. BACCAR Chimie Organique

CHARGES D'ENSEIGNEMENT

M. PRADINES Mathématiques
M. NGUYEN THANH VAN Mathématiques
M. GALINIER Michel Informatique

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE

PROFESSEURS

M. NOUGARO Hydraulique Générale et Appliquée
M. GARDY Génie Chimique
M. BIREBENT Electronique Appliquée
M. VOIGT Chimie Minérale
M. MONTEL Chimie Physique et Electrochimie
M. THIRRIOT Hydrodynamique (E.N.S.E.E.I.H.T.)
M. GRUAT Mécanique des Fluides (Hydraulique)
M. BUGAREL Génie Chimique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M. HAMANT Botanique
Mlle BERDUCOU Physiologie Végétale
M. DAT Mécanique des Fluides

M. FALLOT Biologie Végétale (Viticulture et Arboriculture)
M. TRUCHASSON Mécanique
M. HOFFMANN Electronique
M. ENJALBERT Chimie
M. MARTY Physique Industrielle
M. LEFEUVRE Electronique (E.N.S.E.E.I.H.T.)
M. ANGELINO Génie Chimique
M. DABOSI E.N.S.C.T.

MAITRES DE CONFERENCES

M. MATHIEU Chimie Analytique
M. TRANNOY Physique (E.N.S.E.E.I.H.T.)
M. CASTAGNETTO Mathématiques (E.N.S.E.E.I.H.T.)
M. GILOT Génie Chimique (Institut du Génie Chimique)
M. CALMON Techniques Agricoles
M. MATHEAU Electronique

CHARGES D'ENSEIGNEMENT

M. NOAILLES Informatique

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE TOULOUSE

PROFESSEURS

M. ROQUES Chimie Industrielle
M. GRATELOUP Génie Electrique
M. MASO Génie Civil
M. MIRA Génie Electrique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M. COLETTE Physique
M. FAGET Physique
M. DURAND Gilbert Chimie
M. SCHUTTLER Physique

MAITRES DE CONFERENCES

M. LETURCO Génie Electrique
M. SIRIEYS Génie Civil
M. BROUSSEAU Physique
M. BESOMBES-VAILHE Chimie
M. VERDIER Alain Chimie

CHARGES D'ENSEIGNEMENT

M. LACAZE Mathématiques



ADMINISTRATION

M. PRINEAU Secrétaire Général de l'Université

A mes Enfants

1. Name
2. Address
3. City
4. State
5. Zip

PERSONAL INFORMATION

1. Date of Birth
2. Sex
3. Marital Status
4. Education
5. Occupation
6. Income
7. Religion
8. Race
9. Ethnicity
10. Nationality
11. Citizenship
12. Social Security Number
13. Driver's License Number
14. Passport Number
15. Military Service
16. Criminal Record
17. Credit History
18. Insurance History
19. Medical History
20. Allergies
21. Current Medications
22. Previous Surgeries
23. Family History
24. Genetic Testing
25. Vaccination Status

CONTACT INFORMATION

1. Home Phone
2. Office Phone
3. Cell Phone
4. Email Address
5. Fax Number

EMPLOYMENT HISTORY

1. Employer Name
2. Job Title
3. Dates of Employment
4. Reason for Leaving

EDUCATION HISTORY

1. Institution Name
2. Degree/Certificate
3. Dates of Attendance
4. GPA/Score

SKILLS

1. Language Proficiency
2. Computer Skills
3. Technical Skills
4. Soft Skills
5. Certifications

REFERENCES

1. Name
2. Address
3. Phone Number
4. Email Address

1. Name
2. Address
3. City
4. State
5. Zip
6. Phone Number
7. Email Address

REFERENCES

1. Name
2. Address
3. City
4. State
5. Zip
6. Phone Number
7. Email Address

REFERENCES

1. Name
2. Address
3. City
4. State
5. Zip
6. Phone Number
7. Email Address

1. Name
2. Address
3. City
4. State
5. Zip
6. Phone Number
7. Email Address

REFERENCES

1. Name
2. Address
3. City
4. State
5. Zip
6. Phone Number
7. Email Address

REFERENCES

1. Name
2. Address
3. City
4. State
5. Zip
6. Phone Number
7. Email Address

REFERENCES

1. Name
2. Address
3. City
4. State
5. Zip
6. Phone Number
7. Email Address

REFERENCES

1. Name
2. Address
3. City
4. State
5. Zip
6. Phone Number
7. Email Address

REFERENCES

1. Name
2. Address
3. City
4. State
5. Zip
6. Phone Number
7. Email Address

REFERENCES

1. Name
2. Address
3. City
4. State
5. Zip
6. Phone Number
7. Email Address

R E S U M E

On explicite les opérateurs de collision de l'équation de BOLTZMANN en terme des probabilités de transition pour un gaz de LORENTZ et pour des collisions de type inélastique lorsqu'il y a ou non conservation du nombre initial de particules.

On donne les formes approchées de ces opérateurs lorsque le rapport des masses des particules en présence est faible. Les expressions obtenues sont valables quelles que soient les fonctions de distribution des particules. On effectue ensuite le développement en série d'harmoniques sphériques de ces opérateurs.

Dans un deuxième temps, on résout l'équation de BOLTZMANN dans le cas d'un milieu homogène et stationnaire lorsque l'action du champ électrique est inférieure à celle des collisions. On propose ensuite une méthode de résolution adaptée au cas où champ électrique et collisions jouent des rôles comparables. On donne des expressions analytiques des fonctions de distribution exprimées en terme de solutions asymptotiques valables quel que soit le type de section efficace choisi.

Au cours de la troisième partie, on effectue, par résolution numérique directe de l'équation de BOLTZMANN, l'étude d'un milieu hétérogène et stationnaire pour des valeurs élevées du rapport champ électrique sur pression. On établit l'existence d'un réseau unique de directions caractéristiques et d'une fonction de distribution présentant, dans l'espace des phases, une structure de "bandes", spécifique de la présence des collisions inélastiques.

Dans la quatrième partie, on simule le mouvement des électrons au moyen d'une méthode du type Monte-Carlo.

Les calculs étant effectués dans l'hélium, on donne enfin, au cours de la cinquième partie, une étude bibliographique des sections efficaces relatives à ce gaz.

ABSTRACT

The collision operators of the Boltzmann equation are derived in terms of the scattering probabilities for a Lorentz gas and for inelastic collisions with or without conservation of the original number of particles.

The approximate forms of these operators are given for the case where the ratio of the particle masses (m/M) is small. These expressions are valid for any particle distribution function. Next, the development in a series of spherical harmonics is performed on these operators.

The Boltzmann equation is then solved for the case of a homogeneous and stationary medium when the action of the electric field is less than that of the collisions. We suggest a solution for the case in which the electric field and the collisions play nearly equal roles. Analytical expressions for the distribution functions are given in terms of asymptotic solutions valid for any type of cross section.

In the third part a heterogeneous and stationary medium is studied using a direct numerical solution to the Boltzmann equation for high electric field/pressure ratios. The existence of a unique network of characteristic directions is established, as well as a distribution function having a band structure indicating the presence of inelastic collisions.

In the fourth part the motion of the electrons is simulated using a Monte Carlo method.

A bibliographical study of the cross sections of helium, the gas used for these calculations, is given in the fifth part.

Je dois à Monsieur le Professeur D. BLANC, Directeur du Centre de Physique Atomique de l'Université Paul Sabatier de TOULOUSE d'avoir pu entreprendre et développer ces recherches. Il m'a toujours dirigé avec dévouement et fait bénéficier de ses critiques, de ses conseils et de ses encouragements. Je le prie de trouver ici le témoignage de ma très sincère gratitude.

Monsieur le Doyen E. DURAND, Directeur du Laboratoire de Physique Mathématique de l'Université Paul Sabatier, a accepté d'examiner mon travail et de faire partie du Jury. Qu'il veuille bien agréer l'expression de mes remerciements les plus respectueux.

Monsieur le Professeur J. L. DELCROIX, Directeur du Laboratoire de Physique des Plasmas de l'Université de PARIS-SUD, a bien voulu, depuis mon entrée au Centre National de la Recherche Scientifique, me faire bénéficier de ses connaissances en parrainant mes travaux. Malgré les lourdes obligations qu'il assume, il me fait maintenant l'honneur de participer au Jury de ma thèse. C'est pour moi un plaisir que de pouvoir ici lui exprimer ma gratitude ainsi que ma respectueuse considération.

Monsieur le Professeur DUTTON de l'Université de SWANSEA, a accepté aimablement de se déplacer spécialement à TOULOUSE pour juger mon travail. Qu'il me soit permis de lui témoigner ma très sincère reconnaissance et de dire combien je suis sensible à son geste.

Je remercie très respectueusement Monsieur le Professeur BRAGLIA de l'Université de PARME, pour le soin avec lequel il a effectué l'analyse de mon manuscrit ainsi que pour les discussions que j'ai pu avoir avec lui.

Depuis mon entrée au Laboratoire, J. MAUREL assume la direction du groupe des "Décharges en Courant Continu" auquel j'appartiens. Il a été pour moi un guide et un ami. Je suis heureux de lui exprimer ici ma sincère reconnaissance.

Je remercie également tous mes collègues du Centre de Physique Atomique et plus particulièrement mes collaborateurs du groupe de recherche qui m'ont constamment épaulé : Madame J. LEROUVILLOIS-GAILLARD, Mademoiselle M. CORTINA, Messieurs G. VIDAL, R. KELLER et J. F. DENES. Ils ont par leur travail, leur dévouement et leurs initiatives contribué à cet ouvrage : qu'ils soient assurés de ma très sincère amitié.

Il m'est très agréable enfin de remercier Madame DURAND ainsi que Monsieur BÉLINGUIER auxquels je dois la parfaite réalisation de ce mémoire.

TABLE DES MATIERES

XXXXX

INTRODUCTION

PREMIERE PARTIE : ETUDE DES OPERATEURS DE COLLISION DE L'EQUATION DE BOLTZMANN POUR UN GAZ DE LORENTZ Page 1

CHAPITRE I : L'EQUATION CINETIQUE DE BOLTZMANN POUR UN GAZ DE LORENTZ . 5

I.1. Ecriture du terme de mouvement libre	5
I.2. Ecriture des termes de collision	6
I.2.1. La notion de probabilité de transition	6
I.2.2. Ecriture des probabilités de transition	7
I.2.2.1. <i>Collisions</i> qui conservent le nombre de particules	7
I.2.2.2. <i>Collisions</i> avec modification du nombre de particules (ionisation)	9
I.2.3. Les opérateurs de collision	10

CHAPITRE II : SIMPLIFICATION DES OPERATEURS DE COLLISION 13

II.1. Ecriture de l'opérateur (24) dans le cas où l'agitation thermique des molécules cibles est négligeable	13
II.2. Ecriture des opérateurs (24) et (26) dans le cas où le rapport des masses des particules en présence est faible	16
II.2.1. Développement de l'opérateur conservatif (24)	17
II.2.2. Développement de l'opérateur d'ionisation (26)	20

<u>CHAPITRE III : DEVELOPPEMENT DES OPERATEURS DE COLLISION EN SERIE</u>	
<u>D'HARMONIQUES SPHERIQUES</u>	23
III.1. Définition des harmoniques sphériques	23
III.2. Développement de l'opérateur (38)	25
III.3. Développement des opérateurs (47) et 50)	25
III.3.1. Développement de l'opérateur (47)	26
III.3.2. Développement de l'opérateur (50)	31
 <u>APPENDICE 1-1</u>	35
 <u>APPENDICE 1-2</u>	39
 <u>APPENDICE 1-3</u>	41
 <u>DEUXIEME PARTIE : ETUDE DE L'EQUATION DE BOLTZMANN DANS LE CAS</u> <u>D'UN MILIEU HOMOGENE ET STATIONNAIRE</u>	45
 <u>CHAPITRE I : ETABLISSEMENT DES EQUATIONS POUR UN MILIEU HOMOGENE ET</u> <u>STATIONNAIRE</u>	51
I.1. Définition des temps caractéristiques du système	51
I.2. Première échelle des temps : rapport champ électrique sur pression très faible	55
I.2.1. Gaz atomique : collisions élastiques pures	55
I.2.2. Gaz moléculaire : collisions élastiques et inélastiques (excitation des niveaux de rotation et de vibration)	58
I.3. Deuxième échelle des temps : rapport champ électrique sur pression de moyenne intensité	61
I.3.1. Collisions élastiques pures	61
I.3.2. Collisions élastiques et collisions inélastiques	62
<i>Equations vérifiées par la "queue" de la fonction de distribution</i>	64
<i>Equations vérifiées par le "corps" de la fonction de distribution</i>	65
 <u>CHAPITRE II : RESOLUTION DE L'EQUATION DE BOLTZMANN LORSQUE L'ACTION DU</u> <u>CHAMP ELECTRIQUE EST COMPARABLE A CELLE DES COLLISIONS....</u>	67
II.1. Définition de la méthode	67
II.2. Etude d'un gaz de MAXWELL-LORENTZ	69
II.3. Détermination des moments dans le cas d'une fréquence de collision variable	72
II.4. Cas des collisions inélastiques	74

<u>CHAPITRE III : DETERMINATION DE LA FONCTION DE DISTRIBUTION DANS LE CADRE DE LA DEUXIEME ECHELLE DES TEMPS ET EN PRESENCE DES COLLISIONS INELASTIQUES</u>	77
III.1. Transformation de l'équation (43)	78
III.2. Solution asymptotique de (74)	79
III.3. Résultats numériques	83
<u>APPENDICE II-1</u>	89
<u>APPENDICE II-2</u>	93
<u>TROISIEME PARTIE : ETUDE DE L'EQUATION DE BOLTZMANN DANS LE CAS D'UN MILIEU HETEROGENE ET STATIONNAIRE ..</u>	97
<u>CHAPITRE I : ETUDE DES DIRECTIONS CARACTERISTIQUES</u>	101
I.1. Hypothèses adoptées	101
I.2. Définition du réseau de caractéristiques	102
I.2.1. Définition de la première direction caractéristique $E(z)$	103
I.2.2. Définition de la deuxième direction caractéristique $\mu(z)$	104
I.3. Etude du processus externe	105
I.3.1. Zone I, $w \geq 0$	106
I.3.2. Zone II, $w < 0$	106
I.4. Etude du processus interne	107
I.4.1. La zone A, bornée par (10) et l'anode	107
I.4.2. La zone B, bornée par (10) et les axes $z = 0, \mu = -1, \dots$	108
I.4.3. La zone C, bornée par (10) et les axes $z = 0, \mu = 1, \dots$	108
I.5. Topologie du processus externe	110
<u>CHAPITRE II : ETABLISSEMENT DU SCHEMA NUMERIQUE</u>	113
II.1. Position du problème, condition aux limites	113
II.2. Premier schéma de discrétisation	116
II.3. Consistance, convergence et stabilité	124
II.3.1. Etude de la consistance	124
II.3.2. Etude de la convergence	127
II.3.3. Etude de la stabilité	131
II.4. Deuxième schéma de discrétisation	132
<u>CHAPITRE III : ETUDE DE LA CONVERGENCE DU SCHEMA NUMERIQUE ITERATIF ADOPTE</u>	133

CHAPITRE IV : RESULTATS NUMERIQUES	137
IV.1. Etude du facteur de transmission	137
IV.1.1. Variation du facteur de transmission avec l'énergie d'émission à la cathode	138
IV.1.2. Variation du facteur de transmission avec le coefficient de réflexion à la cathode	139
IV.2. Etude de la distribution angulaire	141
IV.3. Etude de la partie isotrope de la fonction de distribution	141
APPENDICE III-1	151
APPENDICE III-2	155
APPENDICE III-3	159
QUATRIEME PARTIE : SIMULATION DU MOUVEMENT DES ELECTRONS PAR UNE METHODE DU TYPE MONTE CARLO	161
CHAPITRE I : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE	165
CHAPITRE II : METHODE DE CALCUL	169
II.1. Etude du mouvement libre de l'électron	169
II.2. Modification de l'énergie de l'électron au cours d'une collision	170
II.3. Détermination du libre parcours λ et nature de la collision	171
II.3.1. Calcul du libre parcours	171
II.3.2. Nature de la collision	173
II.4. Détermination des angles θ et φ	174
II.5. Vue d'ensemble sur la conduite des calculs	176
II.5.1. Programme "facteur de transmission"	176
II.5.2. Programme général	177
CHAPITRE III : RESULTATS (SIMULATION DIRECTE)	179
III.1. Programme "facteur de transmission"	179
Energie moyenne et position moyenne au moment du premier choc inélastique	179
III.1.1. Limite de validité de la distribution classique des libres parcours	179
III.1.2. Influence de l'énergie initiale et des autres paramètres	181
III.2. Facteur de transmission	184

<u>CHAPITRE IV : RESULTATS (SIMULATION DIRECTE) , ETUDE D'UN MILIEU EVOLUTIF</u>	189
IV.1. Limite de validité de la méthode	189
IV.2. Transition vers l'équilibre	190
IV.3. Influence du champ et de la pression	199
IV.3.1. Influence du paramètre E/P à pression constante	199
IV.3.2. Influence de la pression à E/P constant	199
IV.4. Validité des hypothèses	199
 <u>CHAPITRE V : SIMULATION INDIRECTE DE L'EVOLUTION SPATIO TEMPORELLE</u> <u>D'UNE POPULATION ELECTRONIQUE</u>	 205
V.1. Généralités	205
V.2. Méthode de calcul	208
V.3. Résultats	209
 <u>CINQUIEME PARTIE : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE RELATIVE AUX SECTIONS</u> <u>EFFICACES DE COLLISION</u>	 213
I. <u>SECTIONS EFFICACES DU TYPE I (BIBLIOGRAPHIE GENERALE)</u>	217
I.1. Sections efficaces de collision élastique	217
I.1.1. Résultats expérimentaux	217
I.1.2. Déterminations théoriques	220
I.2. Sections efficaces pour le transfert de la quantité de mouvement	221
I.3. Sections efficaces d'excitation des niveaux optiques	224
I.3.1. Transitions optiquement permises	225
I.3.2. Transitions optiquement interdites	225
I.3.2.1. Sans changement de multiplicité	225
I.3.2.2. Avec changement de multiplicité	225
I.4. Sections efficaces d'ionisation	234
I.4.1. Ionisation simple	234
I.4.2. Ionisation double	234
II. <u>SECTIONS EFFICACES DU TYPE II</u>	247
 <u>CONCLUSION</u>	 251
<u>BIBLIOGRAPHIE</u>	255
<u>GLOSSAIRE</u>	261

INTRODUCTION

XXXXX

Le travail qui suit représente une contribution théorique à l'étude microscopique d'un milieu faiblement ionisé plongé dans un champ électrique uniforme et constant. Par suite de la complexité de la formulation physique précise d'un tel système (qui nécessite en toute rigueur l'adoption d'un formalisme quantique), il m'a paru suffisant d'entreprendre ce travail en m'appuyant sur les résultats bien connus de la théorie cinétique des gaz faiblement ionisés qui a été développée à la suite des travaux de HOLSTEIN (Ho-1), MARGENAU (Ma-2), BAYET, DELCROIX et DENISSE (Ba-2 à Ba-4) et dans laquelle on admet que la description microscopique du mouvement des particules peut s'effectuer au moyen d'une équation du type Boltzmann. L'étude que je présente ici est essentiellement consacrée à l'évaluation du comportement microscopique d'une décharge stationnaire (pour fixer les idées du type Townsend) située entre les parois d'une diode plane indéfinie et pour l'étude de laquelle il est largement suffisant de prendre en considération les interactions du type électron-particule neutre.

L'hypothèse ci-dessus définit ce que l'on a coutume d'appeler le modèle du gaz de Lorentz. Bien qu'un grand nombre de travaux aient été consacrés à ce problème, il m'a semblé que quelques lacunes subsistaient encore.

En premier lieu, le formalisme de la théorie cinétique des gaz ionisés ne me paraît pas constituer un ensemble suffisamment cohérent qui puisse s'appliquer aux collisions de type quelconque qui surviennent dans une décharge. Cela tient au fait que la plupart des résultats sont obtenus à partir de la démonstration originelle de l'équation de Boltzmann qui fait intervenir la notion de collision inverse : sous la forme classique due à Boltzmann n'apparaissent plus de manière claire les propriétés fondamentales des termes de collision. Dans ces conditions, il m'a paru indispensable à la suite des travaux de DESLOGE (De-2) d'entreprendre une analyse synthétique de ce problème en adoptant un formalisme différent (formalisme des probabilités de transition). La présentation de cette étude fait l'objet de la première partie. On doit noter que les résultats obtenus ne sont pas spécifiques d'un gaz faiblement ionisé et qu'ils peuvent s'appliquer à des théories aussi distinctes que la cinétique des gaz neutres ou des neutrons rapides dès l'instant qu'un gaz léger est diffusé par un milieu plus lourd. Les deuxième et troisième parties sont ensuite consacrées à la résolution de l'équation de Boltzmann.

Dans un premier temps, je me limite à l'étude de la région de la décharge dans laquelle la fonction de distribution est indépendante de la position. L'analyse de cette situation revêt une importance considérable, car c'est précisément dans le cas d'un milieu homogène que s'effectuent d'ordinaire les déterminations expérimentales des grandeurs macroscopiques (méthode des courants). Les difficultés de cette étude se situent d'abord au niveau de l'établissement de l'équation vérifiée par la partie isotrope de la fonction de distribution. La validité des méthodes habituelles de perturbation est liée à l'importance relative du champ électrique et des collisions ; l'un des buts de ce travail est de préciser les diverses limites de validité. Un certain nombre d'autres difficultés interviennent lors de la résolution de ces équations en particulier lorsqu'il est nécessaire de tenir compte des collisions inélastiques. Des problèmes délicats à la fois d'ordre numérique et analytique se posent alors. On doit remarquer que, au cours des études analytiques, la plupart des auteurs considèrent des situations modèles qui sont privées de tout caractère de généralité (dans le but de simplifier les calculs pour pouvoir les mener jusqu'à leur terme) Par

ailleurs, ils adoptent souvent des hypothèses dont la justification est malaisée à obtenir. Cette approche du problème me paraît trop restrictive et insuffisante pour une éventuelle comparaison entre la théorie et l'expérience.

Dans ce qui suit, mon souci est de conserver aux calculs un caractère de généralité et les méthodes de résolution que j'adopterai seront toujours valables quelle que soit la nature du gaz diffuseur ou le type des sections efficaces choisies. Par ailleurs, si j'effectue parfois quelques hypothèses simplificatrices, les résultats obtenus dans ce cas seront toujours comparés à ceux issus d'une résolution numérique directe de l'équation initiale.

L'étude d'un milieu hétérogène présentée dans la troisième partie de ce travail diffère profondément de part son esprit de celle du milieu homogène. Le plus grand réalisme de la situation considérée (présence des parois) impose l'adoption d'une technique purement numérique, qui trouve d'ailleurs son inspiration dans les travaux réalisés dans le domaine du ralentissement des neutrons. Ce travail valable pour des surtensions relativement importante, ne semble pas, à ma connaissance avoir d'équivalent dans la littérature.

On doit noter que dans les deuxième et troisième parties, l'étude, menée exclusivement au moyen du formalisme de l'équation de Boltzmann, n'autorise que la description de l'évolution d'une population moyenne de particules. Elle est donc inadaptée à la description conjointe de l'évolution fluctuante de la fonction de distribution et de l'occupation électronique (on sait que le caractère fluctuant de l'évolution d'une population d'électrons est très marqué dans les processus prédisruptifs). Une telle étude peut être abordée de différent point de vue. Le plus classique consiste à simuler par une méthode du type MONTE CARLO l'évolution stochastique de la population. L'utilisation de cette technique dans la quatrième partie de mon travail me permet notamment de déterminer des grandeurs macroscopiques caractéristiques de la décharge et de les comparer avec les résultats issus de l'équation de Boltzmann. On vérifie ainsi que les résultats obtenus sont en très bon accord avec ceux issus des deuxième et troisième parties.

Dans l'ensemble de ce mémoire, j'ai limité les applications numériques au cas de l'hélium. Dans la cinquième partie, je présente une synthèse bibliographique des principales déterminations des sections efficaces relatives à ce gaz afin de justifier les choix qui ont été effectués pour les diverses applications numériques de ce travail.

Le lecteur désirant d'éventuels compléments sur l'exposé qui va suivre peut se reporter aux quatre thèses de spécialité suivantes, qui constituent l'ossature de ce mémoire.

Jean-François DENES :

"Simulation d'une avalanche électronique dans l'hélium par une méthode du type Monte-Carlo". Thèse de Spécialité, TOULOUSE, n° 1056, (1971).

Argentine Marinette CORTINA :

"Contribution à l'étude des fonctions de distribution en énergie des électrons dans un gaz faiblement ionisé". Thèse de Spécialité, TOULOUSE, n° 1088, (1971).

Joëlle LEROUVILLOIS-GAILLARD :

"Contribution à l'étude des opérateurs de collision électron-molécule pour un gaz faiblement ionisé". Thèse de Spécialité, TOULOUSE, n° 1198, (1971).

Robert KELLER :

"Etude et résolution numérique de l'équation de Boltzmann des gaz faiblement ionisés en milieu hétérogène et en régime stationnaire". Thèse de Spécialité, TOULOUSE, n° 1425, (1973).

P R E M I E R E P A R T I E

ETUDE DES OPERATEURS DE COLLISION DE L'EQUATION DE BOLTZMANN
POUR UN GAZ DE LORENTZ

XXXXX

L'équation que je me propose d'étudier dans ce travail diffère profondément de celle obtenue initialement par BOLTZMANN et qui ne décrivait que l'évolution d'une population moyenne de particules ponctuelles interagissant sous l'effet de collisions binaires et élastiques brutales. Si les notions de binarité et d'instantanéité du choc sont conservées dans ce qui suit, il est indispensable par contre de prendre en considération des interactions plus complexes entraînant une modification de l'énergie interne de l'une ou des deux particules en présence.

Dans ces conditions, il me paraît indispensable de m'écarter du point de vue initial de BOLTZMANN (Ch-2) trop restrictif pour mon propos et d'adopter un outil mieux adapté à l'étude de collisions de nature quelconque. Le formalisme des probabilités de transition tel qu'il a été proposé par WALDMANN (Wa-1), puis repris par DESLOGE (De-2) semble mieux répondre à nos besoins. Non seulement il permet d'unifier l'écriture des termes de collision mais, surtout, il conduit à des expressions bien plus maniables, particulièrement adaptées à l'étude d'un gaz de Lorentz.

CHAPITRE I

L'EQUATION CINETIQUE DE BOLTZMANN POUR UN GAZ DE LORENTZ

XXXXX

1.1. ECRITURE DU TERME DE MOUVEMENT LIBRE :

Considérons un gaz de particules identiques, de masse m , ponctuelles, suffisamment dilué de manière à ce que l'on puisse négliger leurs interactions mutuelles. Désignons par $\mathcal{C}_m(\vec{r}, \vec{v}, t | d\vec{r} d\vec{v})$ la classe de ces particules de position $\vec{r}$ à $d\vec{r}$ près et de vitesse $\vec{v}$ à $d\vec{v}$ près à l'instant t . Soit maintenant :

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{r} d\vec{v}$$

le nombre moyen de ces particules appartenant à la classe $\mathcal{C}_m(\vec{r}, \vec{v}, t | d\vec{r} d\vec{v})$. La grandeur $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ représente la densité (ou fonction de distribution) des particules relativement à la classe définie ci-dessus.

Compte tenu des hypothèses que l'on vient d'effectuer, il est clair que $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ obéit à une équation de Liouville à une particule, c'est-à-dire que :

$$df(\vec{r}, \vec{v}, t)/dt = 0 \quad (1)$$

ou plus explicitement en utilisant les dérivées partielles de f à l'instant t :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \vec{\gamma} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (2)$$

où $\vec{\gamma}$ désigne l'accélération des forces extérieures appliquées. La relation (2) ci-dessus est la traduction mathématique de la constance de la fonction de distribution des particules le long de leur trajectoire au cours du mouvement libre. Cette propriété disparaît maintenant si elles interagissent avec d'autres particules, de même type ou non. La variation de f n'est plus nulle et l'équation (1) devient :

$$df/dt = \mathcal{B}(f) \quad (3)$$

ou $\mathcal{B}(f)$ désigne le terme correctif nécessaire pour tenir compte de l'influence des collisions.

La relation (3) ci-dessus est caractéristique des hypothèses formulées au cours de l'introduction et relatives à l'existence de deux phases bien distinctes dans le mouvement des particules. En fait, et l'on discutera ce point en détail plus loin, compte tenu de leur caractère ponctuel, les collisions ont essentiellement pour conséquence un changement discontinu de la trajectoire, dans l'espace des phases, des particules qui interagissent : étant donné un certain ensemble de trajectoires (ensemble défini biunivoquement par la nature physique du problème considéré), les collisions jouent un rôle de redistribution de l'état des particules avec une modulation fixée par la nature et l'intensité des processus envisagés.

On conçoit maintenant toute l'importance de l'étude des termes constitutifs de $\mathcal{B}(f)$ que je vais effectuer au cours des paragraphes suivants.

1.2. ECRITURE DES TERMES DE COLLISION :

1.2.1. La notion de probabilité de transition :

Jusqu'à présent, je n'ai donné aucune information sur la nature des particules en présence. En effet, et bien que dans les chapitres suivants je traiterai uniquement le cas d'un gaz électron molécule, les relations que je vais établir dans l'immédiat sont valables pour des particules de type quelconque à condition que l'énergie interne de la particule incidente ne soit pas modifiée par la collision.

Plaçons-nous, en premier lieu, dans la situation où le nombre de particules du système se conserve au cours des collisions. Si l'on définit la classe $\mathcal{E}_M(i, \vec{r}, \vec{V}, t | \underline{dr}, \underline{dV})$ des molécules du gaz, de masse M , de position $\vec{r}$ à $\underline{dr}$ près et de vitesse $\vec{V}$ à $\underline{dV}$ près à l'instant t , leur état d'énergie interne étant caractérisé par i , on appelle probabilité de transition :

$$W_{i,j}(\vec{V}, \vec{V} | \vec{V}', \vec{V}') \cdot \underline{dv}' \cdot \underline{dV}' \cdot \frac{1}{\underline{dr}} \cdot dt \quad (4)$$

la probabilité pour que deux particules respectivement de masse m et M , situées pendant un temps dt dans l'élément de volume $\underline{dr}$ se rencontrent et passent ainsi de la classe $\mathcal{E}_m(\vec{r}, \vec{v}, t | \underline{dr}, \underline{dv})$ [resp. $\mathcal{E}_M(i, \vec{r}, \vec{V}, t | \underline{dr}, \underline{dV})$] dans la classe $\mathcal{E}_m(\vec{r}, \vec{v}', t | \underline{dr}, \underline{dv}')$ [resp. $\mathcal{E}_M(j, \vec{r}, \vec{V}', t | \underline{dr}, \underline{dV}')$]

Si l'on s'intéresse maintenant au cas où le nombre initial de particules du système est modifié par les collisions, on peut remarquer que la probabilité de transition se définit différemment selon qu'il y a croissance ou diminution de ce nombre de particules. Dans ce travail, je me placerai strictement dans le cas où le nombre de particules croît, par suite d'une ionisation par exemple. Dans ces conditions, si l'on admet que l'ionisation conduit à deux particules de même type dans le même état d'énergie interne, on définit :

$$W_{i,j}^{ion}(\vec{V}, \vec{V} | \vec{V}', \vec{V}'', \vec{V}') \cdot \underline{dv}' \cdot \underline{dv}'' \cdot \underline{dV}' \cdot \frac{1}{\underline{dr}} \cdot dt \quad (5)$$

comme étant la probabilité pour que deux particules appartenant respectivement aux classes $\mathcal{E}_m(\vec{r}, \vec{v}, t | \underline{dr}, \underline{dv})$ et $\mathcal{E}_M(i, \vec{r}, \vec{v}, t | \underline{dr}, \underline{dv})$ et situées pendant un temps dt dans l'élément de volume $\underline{dr}$ se rencontrent de telle manière que les trois particules résultantes se trouvent dans les classes $\mathcal{E}_m(\vec{r}, \vec{v}', t | \underline{dr}, \underline{dv}')$, $\mathcal{E}_m(\vec{r}, \vec{v}'', t | \underline{dr}, \underline{dv}'')$, $\mathcal{E}_{M-m}(j, \vec{r}, \vec{v}', t | \underline{dr}, \underline{dv}')$.

De manière générale, l'explicitation des probabilités de transition ci-dessus est un problème délicat pour la résolution duquel on doit faire intervenir en toute rigueur la nature quantique des phénomènes. Toutefois, et bien que le formalisme des probabilités de transition autorise en principe une représentation plus exacte de l'interaction interparticulaire, j'en contenterai dans ce qui suit de les expliciter dans le cadre de l'approximation de Boltzmann.

1.2.2. Ecriture des probabilités de transition :

1.2.2.1. Collisions qui conservent le nombre de particules :

D'après les propriétés d'invariance classiques, on a :

$$\vec{w}' = \vec{w} \quad (6a)$$

$$g' = \bar{w} g \quad (6b)$$

et $m^* = mM/(m+M)$ (masse réduite), $\bar{w} = \left[1 + \frac{2}{m^*} \frac{\mathcal{E}_{ij}}{g^2}\right]^{1/2}$, $\mathcal{E}_{ij} = \varepsilon_i - \varepsilon_j$, $\forall i, j$

$$g = |\vec{g}| = |\vec{v} - \vec{v}|, \quad g' = |\vec{g}'| = |\vec{v}' - \vec{v}'|$$

La relation (6a) traduit le fait que la vitesse $\vec{w}$ du centre de masse n'est pas modifiée au cours de la collision. De même, la relation (6b) est caractéristique de l'invariance d'une fraction $\bar{w}g$ du module de la vitesse relative avant le choc (évidemment, si la collision est élastique, $\varepsilon_i = \varepsilon_j$ et $\bar{w} = 1$). Il résulte des relations (6) ci-dessus que la probabilité pour que la particule fictive de masse $m+M$ passe de la classe $\mathcal{E}_{m+M}(\vec{r}, \vec{w}, t | \underline{dr}, \underline{dw})$ dans la classe $\mathcal{E}_{m+M}(\vec{r}, \vec{w}', t | \underline{dr}, \underline{dw}')$ est définie par

$$\delta(\vec{w}' - \vec{w}) \cdot \underline{dw}' \quad (7a)$$

De même, la probabilité pour qu'une particule fictive de masse m^* passe de la classe $\mathcal{E}_{m^*}(\vec{r}, \vec{g}, t | \underline{dr}, \underline{dg})$ dans la classe $\mathcal{E}_{m^*}(\vec{r}, \vec{g}', t | \underline{dr}, \underline{dg}')$ est donnée par :

$$\delta(g' - \bar{w}g) \cdot dg' \quad (7b)$$

Dans les expressions ci-dessus δ désigne la fonction de Dirac. Il est nécessaire, enfin, de définir la probabilité pour que les deux particules de masse m et M situées durant un temps dt dans l'élément de volume $\underline{dr}$ se rencontrent de telle sorte que leur vecteur vitesse relative ait tourné après le choc d'un angle χ et se trouve dans l'angle solide $d\Omega$ ($\sin \chi d\chi d\eta$, η angle azimutal). Cette probabilité s'explique simplement (De-2) en terme de la section efficace différentielle microscopique $\sigma_{ij}(g, \chi)$. Il vient :

$$g \sigma_{ij}(g, \chi) d\Omega \frac{1}{\underline{dr}} dt \quad (8)$$

L'ensemble des probabilités partielles (7a), (7b) et (8) caractérise parfaitement l'état des particules après le choc. Compte tenu de leur indépendance, la probabilité qu'une collision ait lieu de telle sorte que les particules passent respectivement des classes $\mathcal{E}_m(\vec{r}, \vec{v}, t | d\vec{r}, d\vec{v})$ et $\mathcal{E}_m(\vec{r}, \vec{v}, t | d\vec{r}, d\vec{v})$ dans les classes $\mathcal{E}_m(\vec{r}, \vec{v}', t | d\vec{r}, d\vec{v}')$ et $\mathcal{E}_m(\vec{r}, \vec{v}', t | d\vec{r}, d\vec{v}')$ s'écrit :

$$\left[g \sigma_{i,j}(g, \chi) d\Omega \frac{1}{dr} dt \right] \left[\delta(\vec{w}' - \vec{w}) d\vec{w}' \right] \left[\delta(g' - \overline{w}g) dg' \right] \quad (9)$$

Il est facile par ailleurs d'établir les relations suivantes entre éléments différentiels (De-2) :

$$dg' \cdot d\Omega \cdot d\vec{w}' = \frac{1}{g'^2} \cdot dg' \cdot d\vec{w}' = \frac{1}{g'^2} d\vec{v}' d\vec{v}'$$

Alors :

$$W_{i,j}(\vec{v}, \vec{v} | \vec{v}', \vec{v}') = \frac{g}{g'^2} \sigma_{i,j}(g, \chi) \delta(g' - \overline{w}g) \delta(\vec{w}' - \vec{w}) \quad (10)$$

La densité de probabilité $W_{i,j}$ présente un certain nombre de propriétés de symétrie qu'il est plus facile de dégager en écrivant (10) sous la forme :

$$W_{i,j}(\vec{v}, \vec{v} | \vec{v}', \vec{v}') = \mathcal{J}_{i,j}(\vec{g}, \vec{g}') \delta(\vec{w}' - \vec{w}) \quad (11)$$

avec

$$\mathcal{J}_{i,j}(\vec{g}, \vec{g}') = \frac{g}{g'^2} \sigma_{i,j}(g, \chi) \delta(g' - \overline{w}g) \quad (11a)$$

Le nombre et la nature de ces symétries varient en général selon le type d'interaction considéré. Toutefois, compte tenu des propriétés classiques de symétrie des fonctions de Dirac, le terme $\delta(\vec{w}' - \vec{w})$ de (12) est invariant relativement à une permutation de $\vec{w}$ et $\vec{w}'$. Il en est de même si l'on effectue un changement global des signes de $\vec{w}$ et $\vec{w}'$.

Les remarques ci-dessus sont valables quelle que soit la nature de la collision considérée.

Le terme $\mathcal{J}_{i,j}(\vec{g}, \vec{g}')$ ne présente pas des propriétés d'invariance aussi marquées, et, pour une variation quelconque de l'énergie interne de la particule cible, on peut simplement écrire :

$$\mathcal{J}_{i,j}(g, g') = \mathcal{J}_{i,j}(-g, -g') \quad (12)$$

ce qui implique :

$$W_{i,j}(\vec{v}, \vec{v} | \vec{v}', \vec{v}') = W_{i,j}(-\vec{v}, -\vec{v} | -\vec{v}', -\vec{v}') \quad (13)$$

La relation (12) et sa conséquence la relation (13) sont issues de l'hypothèse d'indépendance de la section efficace différentielle $\sigma_{i,j}(g, \chi)$ d'avec l'angle azimutal η .

Si l'on admet maintenant que la collision est élastique, les propriétés classiques des fonctions δ montrent que :

$$\mathcal{J}_{i,i}(\vec{g}, \vec{g}') = \mathcal{J}_{i,i}(\vec{g}', \vec{g}) \quad (14)$$

ce qui conduit à :

$$W_{i,i} (\vec{v}, \vec{v} \mid \vec{v}', \vec{v}') = W_{i,i} (\vec{v}', \vec{v}' \mid \vec{v}, \vec{v}) \quad (15)$$

La relation (15) ci-dessus traduit l'existence dans le cas élastique d'une collision inverse. C'est cette notion qui est utilisée dans la démonstration classique de l'opérateur de Boltzmann. On peut l'étendre à une collision de nature quelconque en admettant que :

$$W_{i,j} (\vec{v}, \vec{v} \mid \vec{v}', \vec{v}') = W_{j,i} (\vec{v}', \vec{v}' \mid \vec{v}, \vec{v}) \quad (16)$$

L'adoption de la relation (16) ci-dessus revient à admettre l'hypothèse de microréversibilité dont la validité basée sur des considérations de nature quantique n'est pas à l'heure actuelle parfaitement établie. Comme on le verra, il ne sera pas utile de l'adopter dans ce travail.

1.2.2.2. Collisions avec modification du nombre de particules (ionisation) :

On peut procéder de la même manière que ci-dessus. On a alors une relation analogue à (11) :

$$W_{i,j}^{ion} (\vec{v}, \vec{v} \mid \vec{v}', \vec{v}'', \vec{v}'') = \mathcal{S}_{i,j}^{ion} (\vec{g} \mid \vec{g}', \vec{g}'') \delta(\vec{w}' - \vec{w}) \quad (17)$$

mais dans laquelle :

$$\mathcal{S}_{i,j}^{ion} (\vec{g} \mid \vec{g}', \vec{g}'') = \frac{g}{g'^2 g''^2} \sigma'_{i,j}^{ion} (g, g', g'', X', X'') \quad (17a)$$

$\sigma'_{i,j}^{ion}$ représente une section efficace relative à l'ionisation d'une particule cible par la particule incidente, de telle sorte qu'il y ait création de deux particules dont les vitesses relatives soient égales, en module, respectivement à g' et g'' . Leurs déviations respectives sont telles que $X' = (\vec{g}, \vec{g}')$, $X'' = (\vec{g}, \vec{g}'')$. Si l'on connaît la probabilité pour qu'un des deux électrons créés soit diffusé sous un certain angle (X' par exemple) il est possible d'introduire une nouvelle section efficace $\sigma_{i,j}^{ion}$ qui se déduit de $\sigma'_{i,j}^{ion}$ en faisant intervenir les lois de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement. On a :

$$\sigma'_{i,j}^{ion} (g, g', g'', X', X'') = \sigma_{i,j}^{ion} (g, g', X', X'') \delta(g'' - \overline{w}' g) \quad (18)$$

avec :

$$\overline{w}' = \left[1 - \left(\frac{\vec{g}'}{g} \right)^2 + \frac{2m}{M} \left(\frac{\vec{g}'}{g} \right) \left(\frac{\vec{g}''}{g} \right) + \frac{2}{m^2} \frac{\mathcal{E}_{i,j}}{g^2} \right]^{1/2} \quad (18a)$$

Par suite de la dépendance de (18a) avec $\vec{g}''$, il est difficile d'exploiter les relations (18) dans le cas général d'un rapport des masses quelconque. On peut éliminer cette difficulté en restreignant les relations ci-dessus à des situations où il est justifié de négliger le recul élastique de la molécule au cours de la collision ($m/M \rightarrow 0$, gaz de Lorentz parfait). Si de plus, et pour la même raison, on considère un gaz de molécules figées avant le choc, il vient :

$$\sigma'_{i,j}^{ion} (v, v', v'', X', X'') = \sigma_{i,j}^{ion} (v, v', X', X'') \delta(v'' - \overline{w}'^{(0)} v) \quad (19)$$

avec maintenant :

$$\overline{\omega'}^{(a)} = \left[1 - \left(\frac{v'}{v} \right) + \frac{2}{m} \cdot \frac{\mathcal{E}_{i,j}}{v^2} \right]^{1/2} \quad (19a)$$

La difficulté rencontrée précédemment n'apparaît plus dans les relations (19).

Les relations de symétrie (12) se généralisent au cas de l'ionisation et l'on a :

$$\mathcal{J}_{i,j}^{ion} (\vec{g} | \vec{g}', \vec{g}'') = \mathcal{J}_{i,j}^{ion} (-\vec{g} | -\vec{g}', -\vec{g}'') \quad (20)$$

Mais en outre, il est nécessaire pour la suite des calculs d'introduire l'hypothèse d'indiscernabilité quantique des électrons issus de l'ionisation et qui se traduit par :

$$\mathcal{J}_{i,j}^{ion} (\vec{g} | \vec{g}', \vec{g}'') = \mathcal{J}_{i,j}^{ion} (\vec{g} | \vec{g}'', \vec{g}') \quad (21)$$

soit encore :

$$W_{i,j}^{ion} (\vec{v}, \vec{v} | \vec{v}', \vec{v}'', \vec{v}') = W_{i,j}^{ion} (\vec{v}, \vec{v} | \vec{v}'', \vec{v}', \vec{v}') \quad (22)$$

D'autre part, il convient de remarquer que l'on ne peut plus comme dans le cas des collisions conservatives faire intervenir simplement la notion de collision inverse. En effet, celle-ci est une réaction ternaire (recombinaison à trois corps) que l'on ne sait en général pas décrire. Toutefois, et tant que l'on peut négliger l'influence de ce type de recombinaison vis à vis de la recombinaison à deux corps (ce qui est en général le cas) on peut parfaitement, comme on va le voir ci-dessous, s'affranchir de cette difficulté.

1.2.3. Les opérateurs de collision :

Les opérateurs de collision se définissent simplement (De-2) à partir des probabilités de transition explicitées ci-dessus en faisant le bilan du nombre moyen de particules qui rentrent ou sortent de la classe $\mathcal{C}_m(\vec{r}, \vec{v}, t | d\vec{r} d\vec{v})$ sous l'influence des collisions de tout type pendant l'instant dt .

Compte tenu de la distinction effectuée entre collisions conservatives ou non on peut écrire :

$$\mathcal{B}(f) = \sum_i \sum_j \left[\mathcal{L}_{i,j} (f, F_i) + \mathcal{L}_{i,j}^{ion} (f, F_i) \right] \quad (23)$$

où F_i représente la fonction de distribution des molécules dans un état d'énergie interne caractérisé par l'indice i et où la double sommation porte sur l'ensemble des niveaux excités initiaux et finaux.

Alors, s'il y a conservation du nombre des particules, on a :

$$\mathcal{L}_{i,j} (f, F_i) = \iiint \left[f(\vec{v}) F_i(\vec{v}) W_{i,j}(\vec{v}', \vec{v} | \vec{v}, \vec{v}') \right] \quad (24)$$

$$- f(\vec{v}) F_i(\vec{v}) W_{i,j}(\vec{v}, \vec{v} | \vec{v}', \vec{v}')] \underline{dv'} \underline{dv} \underline{dv'}$$

De même, dans le cas de l'ionisation :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{i,j}^{ion}(f, F_i) = & \iiint \left[f(\vec{v}') F_i(\vec{v}) W_{i,j}^{ion}(\vec{v}', \vec{v} | \vec{v}, \vec{v}'', \vec{v}') \right. \\ & + f(\vec{v}'') F_i(\vec{v}) W_{i,j}^{ion}(\vec{v}'', \vec{v} | \vec{v}', \vec{v}, \vec{v}') \\ & \left. - f(\vec{v}) F_i(\vec{v}) W_{i,j}^{ion}(\vec{v}, \vec{v} | \vec{v}', \vec{v}'', \vec{v}') \right] \underline{dv'} \underline{dv''} \underline{dv} \underline{dv'} \end{aligned} \quad (25)$$

L'expression (25) ci-dessus a été écrite en admettant que l'on pouvait distinguer la particule diffusée de la particule arrachée (mécanique classique). Leur indiscernabilité peut être facilement prise en considération au moyen de la relation (22) et en tenant compte du caractère de variable muette des variables d'intégration de (25). Alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{i,j}^{ion}(f, F_i) = & \iiint \left[2 f(\vec{v}') F_i(\vec{v}) W_{i,j}^{ion}(\vec{v}', \vec{v} | \vec{v}, \vec{v}'', \vec{v}') \right. \\ & \left. - f(\vec{v}) F_i(\vec{v}) W_{i,j}^{ion}(\vec{v}, \vec{v} | \vec{v}', \vec{v}'', \vec{v}') \right] \underline{dv'} \underline{dv''} \underline{dv} \underline{dv'} \end{aligned} \quad (26)$$

Les expressions affectées du signe moins dans les relations ci-dessus représentent le nombre moyen de particules qui quittent l'élément de volume $\underline{dr} \underline{dv}$: dans ce qui suit, on désignera les expressions de ce type par "terme de dépopulation". De la même manière, on appellera "terme de population" les parties de (24), (25) et (26) qui sont précédées du signe plus et qui représentent le nombre moyen de particules qui rentrent dans l'élément de volume $\underline{dr} \underline{dv}$ sous l'effet des collisions.

Les expressions (23) et (26) ci-dessus associées aux relations (10) et (17) représentent l'écriture explicite des opérateurs de collision de l'équation de Boltzmann dans le cas de collisions de type quelconque, qu'il y ait ou non conservation du nombre de particules, pourvu que l'état d'énergie interne de la particule incidente ne soit pas modifié. Malgré le caractère de linéarité de ces opérateurs, il n'est guère possible d'obtenir des solutions de l'équation de Boltzmann sous leur forme originelle. Aussi, est-on obligé d'effectuer un certain nombre d'approximations justifiées par la nature physique du problème considéré. De manière classique la théorie d'un gaz électron-molécule s'effectue en négligeant dans les opérateurs (24) ou (26) les termes qui sont d'ordre supérieur au rapport des masses. Si le champ électrique extérieur est de forte intensité on peut négliger l'agitation thermique des molécules cibles compte tenu de l'énergie moyenne élevée du gaz de particules chargées.

Par la suite, on verra qu'il sera suffisant d'adopter, simultanément ou non, les deux hypothèses exposées ci-dessus. Aussi, au cours du chapitre suivant, vais-je établir les relations qui en sont issues.



CHAPITRE II

SIMPLIFICATION DES OPERATEURS DE COLLISION

XXXXX

11.1. ECRITURE DE L'OPERATEUR (24) DANS LE CAS OU L'AGITATION THERMIQUE DES MOLECULES CIBLES EST NEGLIGEABLE.

Compte tenu de l'hypothèse effectuée, il n'est pas nécessaire, dans ce paragraphe, d'adopter une valeur particulière pour le rapport des masses. Les relations obtenues seront donc valables aussi bien pour les électrons (faible valeur du rapport des masses) que pour les ions de masse élevée.

Posons :

$$\mathcal{L}_{i,j}(f, E_i) = \mathcal{L}_{i,j}^P(f, E_i) - \mathcal{L}_{i,j}^D(f, E_i) \quad (27)$$

Dans (27), $\mathcal{L}_{i,j}^P$ et $\mathcal{L}_{i,j}^D$ désignent respectivement les termes de population et de dépopulation de $\Psi_{i,j}$.

Après avoir posé $\vec{v} = \vec{g}$ dans $\mathcal{L}_{i,j}^D$, on a très simplement :

$$\mathcal{L}_{i,j}^D = N_i \int \sigma_{i,j}(v) f(\vec{v}) \quad (28)$$

où

$$\sigma_{i,j}(v) = \int \sigma_{i,j}(v, \chi) d\Omega$$

et

$$N_i = \int F_i(\vec{v}) d\vec{v}$$

désignent respectivement la section efficace totale d'excitation du niveau i au niveau j et la densité des molécules du gaz d'énergie interne définie par l'indice i .

La difficulté des calculs se situe au niveau du terme de population $\mathcal{L}_{i,j}^P$ qui s'écrit en explicitant (24) :

$$\mathcal{L}_{i,j}^P (f, F_i) = \iiint \frac{g'}{g^2} \sigma_{i,j} (g', \chi) \delta (g - \overline{\omega}_1 g') \delta (\vec{\omega}' - \vec{\omega}) f(\vec{v}') \dots \dots F_i (\vec{v}') \underline{dv'} \underline{dV} \underline{dV'} \quad (29)$$

avec
$$\overline{\omega}_1 = \left[1 + \frac{2}{m^*} \cdot \frac{\mathcal{E}_{i,j}}{g'^2} \right]^{1/2} \quad (29a)$$

Mon but maintenant est de transformer l'expression (29) de manière à ce qu'elle prenne la forme la plus simple possible. Pour ce faire, on aura besoin des lois de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie et des relations bien connues pour les fonctions de Dirac :

$$\delta [h(x)] = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{\left| \frac{dh(x)}{dx} \right|_{x_i}} \quad \text{avec} \quad h(x_i) = 0 \quad (30a)$$

et $\delta(ax) = \delta(x)/|a| \quad a = e^{te} \quad (30b)$

A l'aide de (30a), il vient :

$$\delta (g - \overline{\omega}_1 g') = \frac{g}{g'} \delta (g' - \overline{\omega}_2 g) \quad (31)$$

avec $\overline{\omega}_2$ défini par :

$$\overline{\omega}_2 = \left[1 - \frac{2}{m^*} \frac{\mathcal{E}_{i,j}}{g^2} \right]^{1/2} \quad (31a)$$

D'autre part, on a la relation :

$$\delta (g' - \overline{\omega}_2 g) = 2 \overline{\omega}_2 g \delta (g'^2 - \overline{\omega}_2^2 g^2) \quad (32)$$

obtenue en appliquant (29) à $\delta (g'^2 - \overline{\omega}_2^2 g^2)$ et en observant que $\delta (g' + \overline{\omega}_2 g)$ est nul.

Par ailleurs ,

$$g'^2 - \overline{\omega}_2^2 g^2 = v'^2 - \left(g^2 - \frac{2}{m^*} \mathcal{E}_{i,j} \right)$$

soit, compte tenu de la loi de conservation de la quantité de mouvement :

$$g'^2 - \overline{\omega}_2^2 g^2 = \frac{m+M}{M^2} \left[(M-m) v'^2 - (m+M) v^2 + 2 m \vec{v}' \cdot \vec{v} + \frac{2M}{m} \mathcal{E}_{i,j} \right] \quad (33)$$

A l'aide des relations (30), on obtient :

$$\delta (g'^2 - \overline{\omega}_2^2 g^2) = \frac{M^2}{m+M} \cdot \frac{1}{2 m v v'} \delta (\mu^* - \cos \theta^*) \quad (34)$$

avec

$$\cos \theta^* = \frac{(m+M) v^2 - (M-m) v'^2 - \frac{2M}{m} \mathcal{E}_{i,j}}{2 m v v'} \quad (34a)$$

où θ^* , défini par $(\vec{v}, \vec{v}')$, représente l'angle de déviation dans le système du laboratoire.

Si enfin, on tient compte des relations :

$$E_i(\vec{v}') \underline{dv'} = N_i \delta(\vec{v}') \underline{dv'} \quad (35)$$

$$\delta(\vec{w}' - \vec{w}) \underline{dv} = \left[\frac{m+M}{M} \right]^3 \delta(\vec{w}' - \vec{w}) \underline{dw} \quad (36)$$

rassemblant les relations (31), (32), (34), (35) et (36), les portant dans (29) et effectuant les intégrations, on obtient finalement :

$$\mathcal{L}_{i,j}^p(f, F_i) = N_i \frac{(m+M)^2}{mM} \iint \frac{v'}{\left[v'^2 + \frac{2}{m^*} \mathcal{E}_{i,j} \right]^{1/2}} \cdot \frac{v'}{v} \sigma_{i,j}(v', X) \cdot \delta(\mu^* - \cos \theta^*) f(\vec{v}') dv' d\omega \quad (37)$$

avec

$$d\omega = \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

Comme le cosinus μ^* de l'angle de déviation dans le système du laboratoire apparaît explicitement dans (37), il est préférable de changer de système de coordonnées de manière à pouvoir intégrer par rapport à μ^* . Il suffit d'effectuer une rotation du système du laboratoire de sorte que l'axe principal soit porté par le vecteur $\vec{v}$. Alors :

$$d\omega^* = d\omega$$

avec

$$d\omega^* = \sin \theta^* \, d\theta^* \, d\varphi^* = -d\mu^* \, d\varphi^*$$

Dans ces conditions, si l'on pose :

$$p(v) = [r(v) - mv] / (M-m)$$

$$q(v) = [r(v) + mv] / (M-m)$$

$$r(v) = \left[M^2 v^2 - \frac{2M}{m} (M-m) \mathcal{E}_{i,j} \right]^{1/2}$$

on aboutit à l'expression définitive de $\mathcal{L}_{i,j}^p$:

$$\mathcal{L}_{i,j}^p(f, F_i) = N_i \frac{(m+M)^2}{mM} \int_{p(v)}^{q(v)} dv' \int d\varphi^* \frac{v'}{\left[v'^2 + \frac{2}{m^*} \mathcal{E}_{i,j} \right]^{1/2}} \cdot \frac{v'}{v} \sigma_{i,j}(v', X) f(v', \mu') \quad (38)$$

avec

$$\mu' = \mu \mu^* + (1 - \mu^2)^{1/2} (1 - \mu^{*2})^{1/2} \cos \varphi^* = \cos \theta'$$

et

$$\mu^* = \cos \theta^* \text{ toujours défini par (34a)}$$

L'expression (38) ci-dessus généralise un certain nombre de relations obtenues dans la littérature dans le cas des seules collisions élastiques. En dehors des travaux de WANNIER (Wa-2) où l'opérateur (38) est appliqué à l'étude du mouvement des ions dans un gaz Maxwellien, la restriction de (38) aux collisions élastiques a trouvé son champ le plus large d'applications en théorie du ralentissement des neutrons (Da-2).

Sous sa forme actuelle, l'opérateur (38) présente une structure particulièrement favorable à l'étude numérique, d'autant mieux que le rapport des masses des particules en présence est plus proche de un, la situation idéale étant représentée par le cas des ions se déplaçant dans un gaz de même masse. Dans ce travail, je limiterai les applications numériques aux électrons, mais il me paraît important de donner quelques indications sur la manière dont on peut aborder le calcul du mouvement des ions, de façon à mieux saisir les différences qui existent entre les deux problèmes. On trouvera ces informations en appendice, à la fin de la troisième partie.

11.2. ECRITURE DES OPERATEURS (24) ET (26) DANS LE CAS OU LE RAPPORT DES MASSES DES PARTICULES EN PRESENCE EST FAIBLE.

Si le rapport $\xi^2 = m/M$ des masses des deux composantes du gaz est faible, on a l'habitude de développer les opérateurs de collision (24) et (26) en série des puissances de ξ . L'intérêt d'un tel développement a été depuis longtemps bien précisé dans la littérature (Ch-2).

Définissons alors la série :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(0)} + \mathcal{L}^{(1)} + \mathcal{L}^{(2)} + o(\xi^3) \quad (39)$$

où $\mathcal{L}$ désigne un opérateur de collision de type quelconque et dans laquelle les termes $\mathcal{L}^{(h)}$ sont d'ordre ξ^h . La détermination des opérateurs $\mathcal{L}^{(h)}$ du développement ci-dessus ne semble pas encore avoir été réalisée pour l'ensemble des expressions (24) et (26) proposées plus haut. En général, les travaux dans ce domaine concernent presque exclusivement les collisions élastiques. Même dans ce cas, on ne traite souvent que des situations très particulières où l'on admet que la distribution F_i des molécules est Maxwellienne (De-2), (Na-1). Une étude systématique toutefois du cas élastique a été réalisée par BERNSTEIN (Be-3) puis reprise par LO SURDO (Lo-2). Dans ces deux travaux, aucune hypothèse n'est effectuée en ce qui concerne la nature des fonctions f et F_i .

Dans le domaine des collisions inélastiques conservatives, une détermination des termes de (39) a été réalisée par MAC CORMACK (Ma-1) limitée cependant à des distributions f et F_i respectivement isotropes et Maxwelliennes.

Aucune évaluation de (39) dans le cas de collisions inélastiques non conservatives n'a à ma connaissance été entreprise.

Dans ce qui suit, je me propose donc d'effectuer un développement systématique sous la forme (39) des opérateurs (24) et (26) pour des fonctions de distribution f et F_i quelconques. Un tel développement est rendu possible grâce à la structure particulière de (24) et (26) exprimés en terme des probabilités de transition. Grâce à ce formalisme l'étude des collisions élastiques ne se différencie pas de celle des collisions inélastiques et on se contentera, comme précédemment, d'effectuer une distinction selon qu'il y a ou non conservation du nombre initial de particules.

II.2.1. Développement de l'opérateur conservatif (24).

Posons :

$$\mathcal{L}_{i,j}(f, F_i) = \iiint \left[f(\vec{v}) F_i(\vec{v}') \mathcal{L}_{i,j}(\vec{g}, \vec{g}) - f(\vec{v}) F_i(\vec{v}) \mathcal{L}_{i,j}(\vec{g}, \vec{g}') \right] \cdot \delta(\vec{w}' - \vec{w}) \frac{d\vec{v}'}{dV} \frac{d\vec{v}}{dV'} \quad (40)$$

avec $\mathcal{L}_{i,j}$ défini par (11a).

Si la température du gaz léger est plus élevée ou égale à celle du gaz lourd, on peut montrer (De-2) que la vitesse moyenne de déplacement du gaz lourd est reliée (en ordre de grandeur) à celle du gaz léger par la relation :

$$\langle \vec{v} \rangle \sim \xi \langle \vec{v}' \rangle \quad (41)$$

Alors, appliquant cette relation aux vitesses instantanées, on peut admettre comme bonne approximation :

$$\frac{\vec{v}}{\vec{v}'} \sim \xi \ll 1 \quad (42)$$

La relation ci-dessus montre qu'un développement en série des puissances de $\vec{v}/\vec{v}'$ est équivalent à un développement en série des puissances de ξ et suggère, par suite, une décomposition de (40) en série de ces mêmes puissances. L'examen de (40) indique, d'autre part, que le rapport $\vec{v}/\vec{v}'$ ne figure que dans le terme $\mathcal{L}_{i,j}$: c'est ici qu'intervient un des grands avantages du formalisme des probabilités de transition par rapport aux méthodes de BERNSTEIN ou de LO SURDO. En effet, si l'on utilise la forme classique de l'opérateur de Boltzmann, il est nécessaire d'effectuer plusieurs développements en série de Taylor, pour f , F_i et $\sigma_{i,j}$. Dans notre cas, au contraire, il suffit de développer $\mathcal{L}_{i,j}$ en série de Taylor autour des points $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ en se limitant aux termes quadratiques (d'ordre ξ^2). Il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{i,j}(\vec{g}, \vec{g}) &= \mathcal{L}_{i,j}(\vec{v} - \vec{v}', \vec{v} - \vec{v}') = \mathcal{L}_{i,j}(\vec{v}', \vec{v}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_v + \vec{v}' \cdot \vec{\nabla}_{v'}) \mathcal{L}_{i,j}(\vec{v}', \vec{v}) \\ &+ \frac{1}{2} (\vec{v} \vec{v} : \vec{\nabla}_v \vec{\nabla}_v + 2 \vec{v} \vec{v}' : \vec{\nabla}_v \vec{\nabla}_{v'} + \vec{v}' \vec{v}' : \vec{\nabla}_{v'} \vec{\nabla}_{v'}) \mathcal{L}_{i,j}(\vec{v}', \vec{v}) \end{aligned} \quad (43a)$$

avec une expression symétrique (43b) pour $\mathcal{L}_{i,j}(\vec{g}, \vec{g}')$.

Les notations $\vec{v} \cdot \vec{v}$ et $\vec{v} \vec{v} : \vec{\nabla}_v \vec{\nabla}_v$ représentent respectivement le produit tensoriel dyadique des deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ et le produit contracté des deux dyades $\vec{v} \vec{v}$ et $\vec{\nabla}_v \vec{\nabla}_v$. Portant (43a) et (43b) dans (40), groupant les termes de même ordre, utilisant la relation classique :

$$\vec{v}' = \vec{v} + \frac{m}{M} (\vec{v} - \vec{v}')$$

et négligeant les termes d'ordre supérieur à ξ^2 , il vient :

$$\mathcal{L}_{i,j}^{(0)} = N_i \iint \left[f(\vec{v}') \mathcal{L}_{i,j}(\vec{v}', \vec{v}) - f(\vec{v}) \mathcal{L}_{i,j}(\vec{v}, \vec{v}') \right] \delta(\vec{w}' - \vec{w}) \frac{d\vec{v}'}{dV} \frac{d\vec{v}}{dV'} \quad (44a)$$

$$\mathcal{L}_{i,j}^{(1)} = N_i \langle \vec{v} \rangle \cdot \left\{ \iint \left[f(\vec{v}') \vec{\nabla}_{v'} \mathcal{L}_{i,j}(\vec{v}', \vec{v}) - f(\vec{v}) \vec{\nabla}_v \mathcal{L}_{i,j}(\vec{v}, \vec{v}') \right] \delta(\vec{w}' - \vec{w}) \underline{dv'} \underline{dv'} \right. \\ \left. - \iint \left[f(\vec{v}') \vec{\nabla}_v \mathcal{L}_{i,j}(\vec{v}', \vec{v}) - f(\vec{v}) \vec{\nabla}_{v'} \mathcal{L}_{i,j}(\vec{v}, \vec{v}') \right] \delta(\vec{w}' - \vec{w}) \underline{dv'} \underline{dv'} \right\} \quad (44b)$$

$$\mathcal{L}_{i,j}^{(2)} = \frac{1}{2} N_i \langle \vec{v} \vec{v} \rangle : \left\{ \iint \left[f(\vec{v}') \vec{\nabla}_v \vec{\nabla}_{v'} \mathcal{L}_{i,j}(\vec{v}', \vec{v}) - f(\vec{v}) \vec{\nabla}_{v'} \vec{\nabla}_v \mathcal{L}_{i,j}(\vec{v}, \vec{v}') \right] \delta(\vec{w}' - \vec{w}) \underline{dv'} \underline{dv'} \right. \\ + \iint \left[f(\vec{v}') \vec{\nabla}_{v'} \vec{\nabla}_v \mathcal{L}_{i,j}(\vec{v}', \vec{v}) - f(\vec{v}) \vec{\nabla}_v \vec{\nabla}_{v'} \mathcal{L}_{i,j}(\vec{v}, \vec{v}') \right] \delta(\vec{w}' - \vec{w}) \underline{dv'} \underline{dv'} \\ \left. + 2 \iint \left[f(\vec{v}') \vec{\nabla}_v \vec{\nabla}_{v'} \mathcal{L}_{i,j}(\vec{v}', \vec{v}) - f(\vec{v}) \vec{\nabla}_{v'} \vec{\nabla}_v \mathcal{L}_{i,j}(\vec{v}, \vec{v}') \right] \delta(\vec{w}' - \vec{w}) \underline{dv'} \underline{dv'} \right\} \quad (44c) \\ + N_i \frac{m}{M} \left\{ \iint \left[f(\vec{v}') \vec{\nabla}_v \mathcal{L}_{i,j}(\vec{v}', \vec{v}) (\vec{v} - \vec{v}') - f(\vec{v}) \vec{\nabla}_{v'} \mathcal{L}_{i,j}(\vec{v}, \vec{v}') (\vec{v}' - \vec{v}) \right] \right. \\ \left. \delta(\vec{w}' - \vec{w}) \underline{dv'} \underline{dv'} \right\}$$

où l'on a posé :

$$N_i \langle \vec{v}^r \rangle = \int \vec{v}^r F_i(\vec{v}) \underline{dv}$$

Nous pouvons maintenant expliciter les termes $\mathcal{L}_{i,j}$ de (44). On a, d'après (11a) :

$$\mathcal{L}_{i,j}(\vec{v}', \vec{v}) = \frac{v'}{v^2} \sigma_{i,j}(v', \chi) \delta(v - \overline{\omega}_1^{(0)} v') \quad (45a)$$

$$\mathcal{L}_{i,j}(\vec{v}, \vec{v}') = \frac{v}{v'^2} \sigma_{i,j}(v, \chi) \delta(v' - \overline{\omega}_2^{(0)} v) \quad (45b)$$

avec :

$$\overline{\omega}_1^{(0)} = \left[1 + \frac{2}{m} \frac{\mathcal{E}_{i,j}}{v'^2} \right]^{1/2} \quad \overline{\omega}_2^{(0)} = \left[1 + \frac{2}{m} \frac{\mathcal{E}_{i,j}}{v^2} \right]^{1/2}$$

Il est clair alors, que l'explicitation définitive des relations (44) ne dépend plus que des propriétés intégrales des fonctions de Dirac vis à vis des différents opérateurs agissant sur elles. On donne ces relations dans l'appendice situé à la fin de cette première partie. Dans ces conditions, si l'on utilise la relation homologue de (36) :

$$\delta(\vec{w}' - \vec{w}) \underline{dv'} = J(\xi) \delta(\vec{w}' - \vec{w}) \underline{dw'}$$

où l'on a posé :

$$J(\xi) = (1 + \xi^2)^3 \sim 1 + 3 \xi^2$$

et si, compte tenu de (30a), on remarque que :

$$\delta(v - \overline{\omega}_1^{(0)} v') = \frac{v}{v'} \delta(v' - u_{i,j})$$

avec

$$u_{i,j}^2 = v^2 - \frac{2}{m} \mathcal{E}_{i,j} \quad \text{et} \quad (\vec{v}, \vec{u}_{i,j}) = \chi$$

le calcul des expressions (44) s'effectue aisément. Alors :

$$\mathcal{L}_{i,j}^{(0)} = J(\xi) N_i \left\{ \int d\Omega \left[f(\vec{u}_{i,j}) \frac{u_{i,j}^2}{v} \sigma_{i,j}(u_{i,j}, \chi) - f(\vec{v}) v \sigma_{i,j}(v, \chi) \right] \right\} \quad (46a)$$

$$\mathcal{L}_{i,j}^{(1)} = J(\xi) N_i \langle \vec{v} \rangle \int d\Omega \left\{ \vec{\nabla}_{u_{i,j}} f(\vec{u}_{i,j}) \frac{u_{i,j}^2}{v} \sigma_{i,j}(u_{i,j}, \chi) - \left[\vec{\nabla}_v \left(\frac{u_{i,j}^2}{v} \sigma_{i,j}(u_{i,j}, \chi) \right) f(\vec{u}_{i,j}) - \vec{\nabla}_v (v \sigma_{i,j}(v, \chi)) f(\vec{v}) \right] \right\} \quad (46b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{i,j}^{(2)} = & \frac{1}{2} J(\xi) N_i \langle \vec{v} \vec{v} \rangle : \int d\Omega \left\{ \left[\vec{\nabla}_v \vec{\nabla}_v \left(\frac{u_{i,j}^2}{v} \sigma_{i,j}(u_{i,j}, \chi) \right) f(\vec{u}_{i,j}) - \vec{\nabla}_v \vec{\nabla}_v (v \sigma_{i,j}(v, \chi)) f(\vec{v}) \right] \right. \\ & + \left. \left[\frac{u_{i,j}^2}{v} \sigma_{i,j}(u_{i,j}, \chi) \right] \vec{\nabla}_{u_{i,j}} \vec{\nabla}_{u_{i,j}} f(\vec{u}_{i,j}) - 2 \vec{\nabla}_v \left[\frac{u_{i,j}^2}{v} \sigma_{i,j}(u_{i,j}, \chi) \vec{\nabla}_{u_{i,j}} f(\vec{u}_{i,j}) \right] \right\} \\ & - N_i \frac{m}{M} \int d\Omega \left\{ \vec{\nabla}_v \cdot \frac{u_{i,j}^2}{v} \sigma_{i,j}(u_{i,j}, \chi) (\vec{v} - \vec{u}_{i,j}) f(\vec{u}_{i,j}) - 3 \frac{u_{i,j}^2}{v} \sigma_{i,j}(u_{i,j}, \chi) f(\vec{u}_{i,j}) + 3 v \sigma_{i,j}(v, \chi) f(\vec{v}) \right\} \end{aligned} \quad (46c)$$

Finalement, on obtient une représentation condensée de $\mathcal{L}_{i,j}$ en symétrisant les expressions (46) ci-dessus, et en posant (Lo-2) :

$$\mathcal{L}_{i,j}(f, F_i) = N_i \sum_{r=0}^{r=2} \overleftrightarrow{\mathcal{H}}_{i,j}^{(r)} : \langle \vec{v}^r \rangle + N_i \frac{m}{M} \vec{\nabla}_v \cdot \overleftrightarrow{\mathcal{D}}_{i,j} \quad (47)$$

avec

$$\overleftrightarrow{\mathcal{D}}_{i,j} = \int d\Omega \frac{u_{i,j}^2}{v} \sigma_{i,j}(u_{i,j}, \chi) (\vec{v} - \vec{u}_{i,j}) f(\vec{u}_{i,j})$$

et

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\mathcal{H}}_{i,j}^{(r)} &= \frac{1}{r!} \int d\Omega \left[-\vec{\nabla}_v \right]^r \left[\frac{u_{i,j}^2}{v} \sigma_{i,j}(u_{i,j}, \chi) f(\vec{u}_{i,j}) - v \sigma_{i,j}(v, \chi) f(\vec{v}) \right] + \overleftrightarrow{\mathcal{P}}_{i,j}^{(r)} \\ \overleftrightarrow{\mathcal{P}}_{i,j}^{(0)} &= 0 ; \overleftrightarrow{\mathcal{P}}_{i,j}^{(1)} = \int d\Omega \left[\frac{u_{i,j}^2}{v} \sigma_{i,j}(u_{i,j}, \chi) \vec{\nabla}_{u_{i,j}} f(\vec{u}_{i,j}) - v \sigma_{i,j}(v, \chi) \vec{\nabla}_v f(\vec{v}) \right] \\ \overleftrightarrow{\mathcal{P}}_{i,j}^{(2)} &= -\vec{\nabla}_v \overleftrightarrow{\mathcal{P}}_{i,j}^{(1)} + \frac{1}{2} \int d\Omega \left[\frac{u_{i,j}^2}{v} \sigma_{i,j}(u_{i,j}, \chi) \vec{\nabla}_{u_{i,j}} \vec{\nabla}_{u_{i,j}} f(\vec{u}_{i,j}) - v \sigma_{i,j}(v, \chi) \vec{\nabla}_v \vec{\nabla}_v f(\vec{v}) \right] \end{aligned}$$

Selon les valeurs de r , les termes $\overleftrightarrow{\mathcal{P}}_{i,j}^{(r)}$ et $\overleftrightarrow{\mathcal{H}}_{i,j}^{(r)}$ représentent respectivement un tenseur dyadique ($r=2$), un vecteur ($r=1$), un scalaire ($r=0$).

Les relations ci-dessus mettent en évidence le caractère symétrique de l'action des termes de population et de dépopulation. Si l'on restreint $\mathcal{L}_{i,j}$ aux seules collisions élastiques et si l'on considère une fonction de distribution $f(\vec{v})$ isotrope alors tous les termes scalaires entre crochets de (47) s'annulent. L'intérêt de cette propriété apparaîtra clairement dans le chapitre suivant consacré à la décomposition en série d'harmoniques sphériques des opérateurs de (47).

Avant d'aborder, au cours du paragraphe ci-dessous l'étude de l'opérateur (26), il me paraît important d'insister sur le caractère de généralité de (47) que l'on peut appliquer aussi bien pour les collisions élastiques ($i=j$), que pour les collisions inélastiques (excitation, $i < j$; désexcitation, $i > j$). A ma connaissance, on ne trouve pas dans la littérature de forme aussi complète que (47) pour des collisions de type conservatif.

II.2.2. Développement de l'opérateur d'ionisation (26) :

La méthode de développement adoptée au paragraphe précédent s'applique aussi dans ce cas. Si l'on procède de la même manière que pour (43), il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ij}^{ion}(\vec{g}, \vec{g}', \vec{g}'') &= \mathcal{L}_{ij}^{ion}(\vec{v}, \vec{v}', \vec{v}'') - \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_v \mathcal{L}_{ij}^{ion}(\vec{v}, \vec{v}', \vec{v}'') - \vec{v}' \cdot (\vec{\nabla}_v \mathcal{L}_{ij}^{ion} + \vec{\nabla}_{v''} \mathcal{L}_{ij}^{ion}) \\ &+ \frac{1}{2} \vec{v} \vec{v} : \vec{\nabla}_v \vec{\nabla}_v \mathcal{L}_{ij}^{ion} + \vec{v}' \vec{v}' : (\vec{\nabla}_v \vec{\nabla}_v \mathcal{L}_{ij}^{ion} + \vec{\nabla}_v \vec{\nabla}_{v''} \mathcal{L}_{ij}^{ion}) \quad (48a) \\ &+ \frac{1}{2} \vec{v}' \vec{v}' : (\vec{\nabla}_v \vec{\nabla}_v \mathcal{L}_{ij}^{ion} + \vec{\nabla}_{v''} \vec{\nabla}_{v''} \mathcal{L}_{ij}^{ion} + \vec{\nabla}_v \vec{\nabla}_{v''} \mathcal{L}_{ij}^{ion}) \end{aligned}$$

avec une expression symétrique (48b) pour $\mathcal{L}_{ij}^{ion}(\vec{g}, \vec{g}', \vec{g}'')$. On a évidemment :

$$\mathcal{L}_{ij}^{ion}(\vec{v}, \vec{v}', \vec{v}'') = \sigma_{ij}^{ion}(\nu, \nu', \chi', \chi'') \delta(\nu'' - \bar{\omega}'^{(o)} \nu) \vec{v}' / (\vec{v}' \vec{v}'') \quad (49a)$$

$$\mathcal{L}_{ij}^{ion}(\vec{v}, \vec{v}, \vec{v}'') = \sigma_{ij}^{ion}(\nu', \nu, \chi', \chi'') \delta(\nu'' - \bar{\omega}_2'^{(o)} \nu') \vec{v}' / (\vec{v}' \vec{v}'') \quad (49b)$$

et

$$\omega_1'^{(o)} = \left[1 - \left(\frac{\nu'}{\nu} \right)^2 + \frac{2}{m} \frac{\mathcal{E}_{ij}}{\nu^2} \right]^{1/2} \quad \omega_2'^{(o)} = \left[1 - \left(\frac{\nu}{\nu'} \right)^2 + \frac{2}{m} \frac{\mathcal{E}_{ij}}{\nu'^2} \right]^{1/2}$$

A partir de maintenant, les calculs s'effectuent de la même manière que dans le cas précédent et l'on aboutit à des expressions symétriques du type (47) :

$$\mathcal{L}_{ij}^{ion}(f, F_i) = N_i \sum_{r=0}^{r=2} \vec{\mathcal{M}}_{ij}^{ion(r)} : \langle \vec{v}^r \rangle + 2 \frac{m}{M} N_i \left[\vec{\nabla}_v \cdot \vec{\mathcal{D}}_{ij}^{ion} + \mathcal{F}_{ij}^{ion} \right] \quad (5)$$

avec :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{D}}_{ij}^{ion} &= \int d\nu' d\Omega' d\Omega'' (\vec{v} - \vec{u}_{ij}^{ion} - \vec{v}') \sigma_{ij}^{ion}(\nu', \nu, \chi', \chi'') \frac{\nu'^3}{\nu^2} f(\vec{v}') \\ \mathcal{F}_{ij}^{ion} &= \int d\nu' d\Omega' d\Omega'' \vec{\nabla}_{u_{ij}^{ion}} \cdot u_{ij}^{ion} \sigma_{ij}^{ion}(\nu', \nu, \chi', \chi'') \frac{\nu'^3}{\nu^2} f(\vec{v}') \\ \vec{\mathcal{M}}_{ij}^{ion(r)} &= \frac{1}{r!} \int d\nu' d\Omega' d\Omega'' \left[-\vec{\nabla}_v^r \right] \left[2 \frac{\nu'^3}{\nu^2} \sigma_{ij}^{ion}(\nu', \nu, \chi', \chi'') f(\vec{v}') - \nu \sigma_{ij}^{ion}(\nu, \nu', \chi', \chi'') f(\vec{v}') \right] + \mathcal{M}_{ij}^{ion(r)} \\ \vec{\mathcal{P}}_{ij}^{ion(0)} &= 0 ; \vec{\mathcal{P}}_{ij}^{ion(1)} = \int d\nu' d\Omega' d\Omega'' \left[2 \frac{\nu'^3}{\nu^2} \sigma_{ij}^{ion}(\nu', \nu, \chi', \chi'') \vec{\nabla}_v f(\vec{v}') - \nu \sigma_{ij}^{ion}(\nu, \nu', \chi', \chi'') \vec{\nabla}_v f(\vec{v}') \right] \\ \vec{\mathcal{P}}_{ij}^{ion(2)} &= -\vec{\nabla}_v \vec{\mathcal{P}}_{ij}^{ion(1)} + \frac{1}{2} \int d\nu' d\Omega' d\Omega'' \left[2 \frac{\nu'^3}{\nu^2} \sigma_{ij}^{ion}(\nu', \nu, \chi', \chi'') \vec{\nabla}_v \vec{\nabla}_v f(\vec{v}') - \right. \\ &\quad \left. - \nu \sigma_{ij}^{ion}(\nu, \nu', \chi', \chi'') \vec{\nabla}_v \vec{\nabla}_v f(\vec{v}') \right] \end{aligned}$$

$$\text{et} \quad u_{ij}^{ion 2} = \nu'^2 - \nu^2 + \frac{2}{m} \mathcal{E}_{ij} ; \quad (\vec{v}, \vec{u}_{ij}^{ion}) = \chi''$$

En dehors de la présence du terme $\mathcal{F}_{ij}^{ion}$ les relations (50) ont bien une structure globalement identique aux relations (47). On peut même pousser plus loin l'analogie en remarquant que les collisions conservatives sont incluses dans (50) qui en constitue donc une généralisation.

Il est facile de voir en effet que l'on peut se ramener aux relations (47) en posant :

$$\sigma_{i,j}^{ion}(v', v, \chi', \chi'') = \sigma_{i,j}(v', \chi') \delta \left[v - \frac{(v'^2 + \frac{2}{m} \mathcal{E}_{i,j})^{1/2}}{2} \right] \delta(\vec{\Omega}' - \vec{\Omega}) \delta(\vec{\Omega}'')$$

$$\sigma_{i,j}^{ion}(v, v', \chi', \chi'') = \sigma_{i,j}(v, \chi') \delta \left[v' - \frac{(v^2 - \frac{2}{m} \mathcal{E}_{i,j})^{1/2}}{2} \right] \delta(\vec{\Omega}' - \vec{\Omega}) \delta(\vec{\Omega}'')$$

et en imposant :

$$\mathcal{F}_{i,j}^{ion} = 0$$



C H A P I T R E I I I

DEVELOPPEMENT DES OPERATEURS DE COLLISION EN SERIE D'HARMONIQUES SPHERIQUES

XXXXX

On sait que, par suite des propriétés rotationnelles des termes de collision, la plupart des méthodes de résolution de l'équation de Boltzmann font usage d'un développement en série d'harmoniques sphériques des divers opérateurs qui la constituent et il me paraît indispensable, à la suite du travail réalisé au cours du chapitre précédent, d'entreprendre cette étude pour l'ensemble des opérateurs de collision proposés. En effet, si le traitement de l'opérateur (38) ne présente guère de difficultés, il n'en est pas de même pour les opérateurs (47) et (50) dont l'étude générale n'a pas, à ma connaissance, été encore réalisée. C'est cette lacune que je vais m'efforcer de combler dans ce qui suit.

III.1. DEFINITION DES HARMONIQUES SPHERIQUES.

On dispose en général d'une assez grande latitude dans le choix des harmoniques sphériques $Y_{n,m}(\theta, \varphi)$. Pour notre propos, il sera commode d'adopter la définition :

$$Y_{n,m}(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos \theta) \exp(i m \varphi) \quad (51)$$

où $P_n^m(\cos \theta)$ représente la fonction de Legendre associée non normalisée de degré n et d'ordre m .

Dans ces conditions, la fonction de distribution $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ a pour développement :

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=+n} f_{n,m}(\vec{r}, \vec{v}, t) Y_{n,m}(\theta, \varphi) \quad (52)$$

avec

$$f_{n,m}(\vec{r}, \nu, t) = \frac{(2n+1)}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int f(\vec{r}, \vec{\nu}, t) Y_{n,m}(\theta, \varphi) d\omega \quad (52a)$$

On utilisera d'autre part les relations classiques :

$$P_n(\cos \theta') = P_n(\cos \theta) P_n(\cos \theta^*) + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta^*) \cos m\varphi \quad (53)$$

(théorème d'addition des fonctions de Legendre)

$$\int Y_{n,m}(\theta', \varphi') P_\ell(\cos \chi) d\Omega = \frac{4\pi}{2n+1} \delta_{n,\ell} Y_{n,m}(\theta, \varphi) \quad (54)$$

avec

$$\cos \chi = \cos \theta \cdot \cos \theta' + \sin \theta \cdot \sin \theta' \cdot \cos(\varphi - \varphi') \quad (54a)$$

(relation d'orthogonalité généralisée (Sa-1)).

On verra plus loin, au cours du développement des opérateurs (47) et (50), qu'il est indispensable de connaître l'action sur $Y_{n,m}(\theta, \varphi)$ des opérateurs $\vec{\nabla}/\nu$, $\nu \vec{\nabla}_\nu$ et $\vec{\nabla}_\nu \vec{\nabla}_\nu$. On démontrera en appendice les relations suivantes (PQ-1) :

$$\frac{\vec{\nabla}}{\nu} Y_{n,m}(\theta, \varphi) = \sum_{\substack{\vec{h,k} \\ h=-1,1 \\ k=-1,0,1}} \vec{\mathcal{A}}(n,m) Y_{n+h,m+k}(\theta, \varphi) \quad (55a)$$

$$\nu \vec{\nabla}_\nu Y_{n,m}(\theta, \varphi) = \sum_{\substack{\vec{h,k} \\ h=-1,1 \\ k=-1,0,1}} \vec{\mathcal{B}}(n,m) Y_{n+h,m+k}(\theta, \varphi) \quad (55b)$$

$$\vec{\nabla}_\nu \vec{\nabla}_\nu Y_{n,m}(\theta, \varphi) = \sum_{\substack{\vec{h',k'} \\ h'=-1,1 \\ k'=-1,0,1}} \sum_{\substack{\vec{h,k} \\ h=-1,1 \\ k=-1,0,1}} \left\{ \vec{\mathcal{B}}(n+h,m+k) \vec{\mathcal{B}}(n,m) Y_{n+h+h',m+k+k'}(\theta, \varphi) - \vec{\mathcal{A}}(n+h,m+k) \vec{\mathcal{B}}(n,m) Y_{n+h+h',m+k+k'}(\theta, \varphi) \right\} \quad (55c)$$

dans lesquelles les vecteurs $\vec{\mathcal{A}}(n,m)$ et $\vec{\mathcal{B}}(n,m)$ sont définis par les relations :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{A}}(n,m) &= \left[\frac{(1-\delta_{0,m}) B(n+m)}{2(2n+1)}, i \frac{(1-\delta_{0,m}) B(n+m)}{2(2n+1)}, 0 \right]; \quad \vec{\mathcal{A}}(n,m) = \left[0, 0, \frac{n+m}{2n+1} \right] \\ \vec{\mathcal{A}}(n,m) &= \left[-\frac{1+\delta_{0,m}}{2(2n+1)}, i \frac{1+\delta_{0,m}}{2(2n+1)}, 0 \right]; \quad \vec{\mathcal{A}}(n,m) = \left[-\frac{(1-\delta_{0,m}) A(n-m)}{2(2n+1)}, -i \frac{(1-\delta_{0,m}) A(n-m)}{2(2n+1)}, 0 \right] \\ \vec{\mathcal{A}}(n,m) &= \left[0, 0, \frac{n-m+1}{2n+1} \right]; \quad \vec{\mathcal{A}}(n,m) = \left[\frac{1+\delta_{0,m}}{2(2n+1)}, -i \frac{1+\delta_{0,m}}{2(2n+1)}, 0 \right] \end{aligned} \quad (56)$$

$$\overset{1,k}{\mathcal{B}}(n,m) = -n \overset{1,k}{\mathcal{A}}(n,m) \quad ; \quad \overset{-1,k}{\mathcal{B}}(n,m) = (n+1) \overset{-1,k}{\mathcal{A}}(n,m) \quad (57)$$

avec :

$$A(x) = (x+1)(x+2) \quad ; \quad B(x) = x(x-1) \quad (58)$$

On aura également besoin de connaître l'action de $\vec{\nabla}_v \vec{\nabla}_v$ sur une grandeur scalaire $S(v)$.

$$\text{On a : } \vec{\nabla}_v \vec{\nabla}_v S(v) = \frac{\vec{J}}{v} \frac{d}{dv} S(v) + \left[\frac{d^2}{dv^2} S(v) - \frac{1}{v} \frac{d}{dv} S(v) \right] \left[\frac{\vec{v} \vec{v}}{v^2} \right] \quad (59)$$

où $\vec{J}$ désigne le tenseur unité.

III.2. DEVELOPPEMENT DE L'OPERATEUR (38).

L'opérateur (38) ne se développe simplement que si l'on restreint la série (52) aux seuls polynômes de Legendre ($m=0$). Dès lors, utilisant la relation (53) et remarquant que les termes en $\cos \theta^*$ disparaissent au cours de l'intégration, il vient :

$$\mathcal{L}_{ij}^p(f, F_i) = 2\pi N_i \frac{(m+M)^2}{mM} \int_{p(v)}^{q(v)} dv' \frac{v'}{(v'^2 + \frac{2}{m^*} \mathcal{E}_{ij})^{1/2}} \cdot \frac{v'}{v} \sigma_{ij}(v', X) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta^*) f_n(v') P_n(\cos \theta) \quad (60)$$

où l'on a posé pour simplifier $f_n(v') = f_{n0}(v')$

Dans le cas d'un gaz Maxwellien élastique, l'opérateur ci-dessus possède d'intéressantes propriétés de commutativité que l'on utilisera au cours de la deuxième partie de ce travail.

III.3. DEVELOPPEMENT DES OPERATEURS (47) ET (50).

BAYET, DELCROIX et DENISSE (Ba-2 à Ba-4) ont étudié l'opérateur $\mathcal{K}_{ii}^{(0)}$ dont les propriétés générales sont indépendantes du comportement de la distribution des molécules $F(\vec{v})$. CHAPMAN et COWLING (Ch-2) ont, les premiers, obtenus une forme différentielle de :

$$N_i \frac{m}{M} \vec{\nabla}_v \cdot \vec{\mathcal{D}}_{ii}$$

dans le cas des collisions élastiques et en admettant que f et F_i sont respectivement isotropes et Maxwelliennes. Cette expression a été également étudiée dans (Ba-3). NAZE (Na-1) a effectué une étude générale de l'opérateur $\mathcal{L}_{ii}$ sous l'hypothèse d'une distribution des molécules Maxwellienne. Le travail le plus complet relatif à $\mathcal{L}_{ii}$ semble être celui de POZZOLI (Po-1) repris quelques années

plus tard sans amélioration notable par LO SURDO (Lo-2). En ce qui concerne les collisions inélastiques conservatives Nelly PEYRAUD (Pe-1) a obtenu le développement général de $\mathcal{M}_{ij}^{(0)}$. MAC CORMACK (Ma-1) a étudié $\mathcal{L}_{ij}$ mais en se limitant à une fonction de distribution des neutres Maxwellienne.

Le but de ce qui suit est de compléter les informations disponibles dans la littérature en effectuant la décomposition de $\mathcal{L}_{ij}$ et de $\mathcal{L}_{ij}^{ion}$ pour des fonctions de distribution des particules lourdes et légères quelconques.

III.3.1. Développement de l'opérateur (47).

L'examen des relations (47) montre clairement que, exception faite du terme en $\overrightarrow{\mathcal{D}}_{ij}$, l'opérateur $\mathcal{L}_{ij}$ dépend uniquement des trois opérateurs :

$$\mathcal{O}_{ij}^{(0)} = N_i \int d\Omega \left[\frac{u_{ij}^2}{v} \sigma_{ij}(u_{ij}, \chi) f(\overrightarrow{u_{ij}}) - v \sigma_{ij}(v, \chi) f(\overrightarrow{v}) \right]$$

$$\overrightarrow{\mathcal{O}}_{ij}^{(1)} = N_i \int d\Omega \left[\frac{u_{ij}^2}{v} \sigma_{ij}(u_{ij}, \chi) \overrightarrow{\nabla_{u_{ij}}} f(\overrightarrow{u_{ij}}) - v \sigma_{ij}(v, \chi) \overrightarrow{\nabla_v} f(\overrightarrow{v}) \right]$$

$$\overrightarrow{\overrightarrow{\mathcal{O}}}_{ij}^{(2)} = N_i \int d\Omega \left[\frac{u_{ij}^2}{v} \sigma_{ij}(u_{ij}, \chi) \overrightarrow{\nabla_{u_{ij}}} \overrightarrow{\nabla_{u_{ij}}} f(\overrightarrow{u_{ij}}) - v \sigma_{ij}(v, \chi) \overrightarrow{\nabla_v} \overrightarrow{\nabla_v} f(\overrightarrow{v}) \right]$$

et des opérateurs obtenus par l'action de $\overrightarrow{\nabla_v}$ ou $\overrightarrow{\nabla_v} \overrightarrow{\nabla_v}$ sur $\mathcal{O}_{ij}^{(0)}$ et de $\overrightarrow{\nabla_v}$ sur $\overrightarrow{\mathcal{O}}_{ij}^{(1)}$. La décomposition en harmoniques sphériques de $\mathcal{L}_{ij}$ nécessite donc dans un premier temps l'étude des expressions $\overrightarrow{\overrightarrow{\mathcal{O}}}_{ij}^{(r)}$. Dans ces conditions, si l'on pose :

$$\sigma_{ij}(v, \chi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sigma_{ij;\ell}(v) P_{\ell}(\cos \chi)$$

avec
$$\sigma_{ij;\ell}(v) = \frac{2\ell+1}{4\pi v} s_{ij;\ell}(v)$$

et

$$s_{ij;\ell}(v) = N_i v \int \sigma_{ij}(v, \chi) P_{\ell}(\cos \chi) d\Omega$$

et si l'on utilise les relations (53), (54) et (55), il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{ij}^{(0)} &= \sum_n \sum_m \left[\frac{u_{ij}}{v} s_{ij;n}(u_{ij}) f_{n,m}(u_{ij}) - s_{ij;0}(v) f_{n,m}(v) \right] Y_{n,m}(\theta, \varphi) \\ &= \sum_n \sum_m \mathcal{O}_{ij;n,m}^{(0)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{ij}^{(1)} &= \sum_n \sum_m \sum_{\vec{h}, \vec{k}} \left\{ \left[\frac{u_{ij}}{v} s_{ij;n+\vec{h}}(u_{ij}) \frac{\partial}{\partial u_{ij}} f_{n,m}(u_{ij}) - s_{ij;0}(v) \frac{\partial}{\partial v} f_{n,m}(v) \right] \overrightarrow{\mathcal{A}}(\vec{n}, \vec{m}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{v} \left[s_{ij;n+\vec{h}}(u_{ij}) f_{n,m}(u_{ij}) - s_{ij;0}(v) f_{n,m}(v) \right] \overrightarrow{\mathcal{B}}(\vec{n}, \vec{m}) \right\} Y_{n+\vec{h}, m+\vec{k}}(\theta, \varphi) \end{aligned}$$

soit

$$\overrightarrow{\mathcal{O}}_{ij}^{(1)} = \sum_n \sum_m \sum_{\vec{h}, \vec{k}} \left\{ \mathcal{O}_{ij;n+\vec{h}, m+\vec{k}}^{(1)} \overrightarrow{\mathcal{A}}(\vec{n}, \vec{m}) + \frac{1}{v} \mathcal{O}_{ij;n+\vec{h}, m+\vec{k}}^{(1)} \overrightarrow{\mathcal{B}}(\vec{n}, \vec{m}) \right\} Y_{n+\vec{h}, m+\vec{k}}(\theta, \varphi)$$

$$\begin{aligned}
 \vec{C}_{i,j}^{(2)} = & \sum_n \sum_m \left\{ \vec{J} \left\{ \frac{1}{v} \left[s_{i,j;n}(u_{i,j}) \frac{\partial}{\partial u_{i,j}} f_{n,m}(u_{i,j}) - s_{i,j;o}(v) \frac{\partial}{\partial v} f_{n,m}(v) \right] \gamma_{n,m}(\theta, \varphi) \right\} \right. \\
 & + \sum_{k',k} \sum_{h,k} \left\{ \left[\frac{u_{i,j}}{v} s_{i,j;n+h+k'}(u_{i,j}) \left[\frac{\partial^2}{\partial u_{i,j}^2} f_{n,m}(u_{i,j}) - \frac{1}{u_{i,j}} \frac{\partial}{\partial u_{i,j}} f_{n,m}(u_{i,j}) \right] - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - s_{i,j;o}(v) \left[\frac{\partial^2}{\partial v^2} f_{n,m}(v) - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} f_{n,m}(v) \right] \right] \vec{A}(n+h, m+k) \vec{B}(n, m) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{2}{v} \left[\frac{u_{i,j}}{v} s_{i,j;n+h+k'}(u_{i,j}) \frac{\partial}{\partial u_{i,j}} f_{n,m}(u_{i,j}) - s_{i,j;o}(v) \frac{\partial}{\partial v} f_{n,m}(v) \right] \vec{A}(n+h, m+k) \vec{B}(n, m) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{v} \left[\frac{1}{u_{i,j}} s_{i,j;n+h+k'}(u_{i,j}) f_{n,m}(u_{i,j}) - \frac{1}{v} s_{i,j;o}(v) f_{n,m}(v) \right] \times \right. \\
 & \quad \left. \times \left[\vec{B}(n+h, m+k) \vec{B}(n, m) - \vec{A}(n+h, m+k) \vec{B}(n, m) \right] \right\} \gamma_{n+h+k', m+k+k'}(\theta, \varphi) \Big\}
 \end{aligned}$$

compte tenu des relations ci-dessus, on a en outre :

$$\begin{aligned}
 -\vec{\nabla}_v C_{i,j}^{(0)} = & - \sum_{n,m} \sum_{k'} \sum_{k} \left[\frac{\partial}{\partial v} C_{i,j;n,m}^{(0)} \vec{A}(n, m) + \frac{1}{v} C_{i,j;n,m}^{(0)} \vec{B}(n, m) \right] \gamma_{n+h, m+k}(\theta, \varphi) \\
 \vec{\nabla}_v \vec{\nabla}_v C_{i,j}^{(0)} = & \sum_n \sum_m \sum_{k',k} \sum_{h,k} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial v^2} C_{i,j;n,m}^{(0)} \vec{A}(n+h, m+k) \vec{A}(n, m) + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} C_{i,j;n,m}^{(0)} \vec{B}(n+h, m+k) \vec{B}(n, m) \right. \\
 & \left. + \frac{\partial}{\partial v} \left(C_{i,j;n,m}^{(0)} \frac{1}{v} \right) \vec{A}(n+h, m+k) \vec{B}(n, m) + \frac{1}{v^2} C_{i,j;n,m}^{(0)} \vec{B}(n+h, m+k) \vec{B}(n, m) \right\} \gamma_{n+h+k', m+k+k'}(\theta, \varphi) \\
 \vec{\nabla}_v \vec{C}_{i,j}^{(1)} = & \sum_n \sum_m \sum_{k',k} \sum_{h,k} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} C_{i,j;n+h,m,1}^{(1)} \vec{A}(n+h, m+k) \vec{A}(n, m) + \frac{1}{v} C_{i,j;n+h,m,1}^{(1)} \vec{B}(n+h, m+k) \vec{A}(n, m) \right. \\
 & \left. + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{v} C_{i,j;n+h,m,2}^{(1)} \right) \vec{A}(n+h, m+k) \vec{B}(n, m) + \frac{1}{v^2} C_{i,j;n+h,m,2}^{(1)} \vec{B}(n+h, m+k) \vec{B}(n, m) \right\} \gamma_{n+h+k', m+k+k'}(\theta, \varphi)
 \end{aligned}$$

En rassemblant les résultats obtenus ci-dessus, il est maintenant facile d'écrire les différents termes du développement. A l'ordre zéro, on a :

$$\boxed{\mathcal{L}_{i,j}^{(0)} = \sum_n \sum_m C_{i,j;n,m}^{(0)}} \quad (61)$$

Cette relation a déjà été obtenue et étudiée par N. PEYRAUD (Pe-1). Dans le cas des collisions élastiques ($i=j$, $u_{i,j}=v$), (61) se réduit à l'opérateur classique du gaz de Lorentz parfait dont les propriétés spectrales ont été longuement analysées par BAYET et alii (Ba-2). La technique de décomposition que j'ai adoptée ici semble toutefois plus simple et plus maniable que celle proposée par ces deux auteurs et qui est basée sur l'étude des propriétés de commutativité et d'hermiticité de l'opérateur $\mathcal{L}_{i,j}^{(0)}$.

L'opérateur d'ordre un s'écrit :

$$\boxed{\mathcal{L}_{i,j}^{(1)} = \langle \vec{v} \rangle \sum_n \sum_m \sum_{k',k} \left\{ \left[C_{i,j;n+h,m,1}^{(1)} - \frac{\partial}{\partial v} C_{i,j;n,m}^{(0)} \right] \vec{A}(n, m) + \frac{1}{v} \left[C_{i,j;n,m,2}^{(1)} - C_{i,j;n,m}^{(0)} \right] \vec{B}(n, m) \right\} \times \gamma_{n+h, m+k}(\theta, \varphi)} \quad (62)$$

L'opérateur ci-dessus a été proposé pour la première fois par POZZOLI (Po-1) mais seulement pour des collisions de type élastique. Il est nul dans le cas d'une distribution isotrope des molécules. On remarque que, même si les collisions sont élastiques, les fonctions sphériques ne sont plus fonctions propres comme pour (61) et les techniques habituelles de décomposition spectrale semblent ne plus pouvoir s'appliquer ici.

Remarquons maintenant que si la distribution des molécules est isotrope, le dyade $N_i \langle \vec{V} \vec{V} \rangle$ devient diagonal. Si, de plus, $F_i(\vec{V})$ est Maxwellienne, on a :

$$N_i \langle \vec{V} \vec{V} \rangle : \vec{J} = N_i \frac{3kT}{M}$$

où T désigne la température du gaz diffuseur. Posons alors :

$$N_i \langle \vec{V} \vec{V} \rangle = N_i \langle \vec{V} \vec{V} \rangle^E + N_i \langle \vec{V} \vec{V} \rangle^D$$

où $N_i \langle \vec{V} \vec{V} \rangle^E$ et $N_i \langle \vec{V} \vec{V} \rangle^D$ représentent respectivement les parties extradiagonales et diagonales de $N_i \langle \vec{V} \vec{V} \rangle$. L'intérêt de la notation (63) est de permettre la mise en évidence de la partie de $\mathcal{L}_{i,j}^{(2)}$ qui est invariante relativement à la nature de $F_i(\vec{V})$. Posons, par analogie avec (63) :

$$\mathcal{L}_{i,j}^{(2)} = \mathcal{L}_{i,j}^{E(2)} + \mathcal{L}_{i,j}^{D(2)} \quad (64)$$

Alors, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{i,j}^{E(2)} = \langle \vec{V} \vec{V} \rangle^E : \sum_n \sum_m \sum_{h,k} \sum_{h',k'} \{ \} \gamma_{n+h+h', m+k+k'}(\theta, \varphi) \quad (65) \\ \{ \} = \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} O_{i,j;n,m}^{(0)} + \frac{1}{2} O_{i,j;n+h+h',m,1}^{(2)} - \frac{\partial}{\partial v} O_{i,j;n+h,m,1}^{(1)} \right] \frac{h',k'}{\mathcal{A}(n+h,m+k)} \frac{h,k}{\mathcal{A}(n,m)} \\ + \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{v} O_{i,j;n,m}^{(0)} \right) - \frac{1}{2} \frac{1}{v} O_{i,j;n+h+h',m,3}^{(2)} - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{v} O_{i,j;n+h,m,2}^{(1)} \right) \right] \frac{h',k'}{\mathcal{A}(n+h,m+k)} \frac{h,k}{\mathcal{B}(n,m)} \\ + \left[\frac{1}{2} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} O_{i,j;n,m}^{(0)} - \frac{1}{v} O_{i,j;n+h,m,1}^{(1)} \right] \frac{h',k'}{\mathcal{B}(n+h,m+k)} \frac{h,k}{\mathcal{A}(n,m)} \\ + \left[\frac{1}{2} \frac{1}{v^2} O_{i,j;n,m}^{(0)} + \frac{1}{2} \frac{1}{v} O_{i,j;n+h+h',m,3}^{(2)} - \frac{1}{v^2} O_{i,j;n+h,m,2}^{(1)} \right] \frac{h',k'}{\mathcal{B}(n+h,m+k)} \frac{h,k}{\mathcal{B}(n,m)} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} O_{i,j;n+h+h',m,1}^{(2)} = \frac{v_{i,j}}{v} s_{i,j;n+h+h',m,1}(v_{i,j}) \left[\frac{\partial^2}{\partial v_{i,j}^2} f_{n,m}(v_{i,j}) - \frac{1}{v_{i,j}} \frac{\partial}{\partial v_{i,j}} f_{n,m}(v_{i,j}) \right] \\ - s_{i,j;0}(v) \left[\frac{\partial^2}{\partial v^2} f_{n,m}(v) - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} f_{n,m}(v) \right] \end{aligned}$$

$$O_{i,j;n+h,h',m,2}^{(2)} = \frac{U_{i,j}}{\sqrt{v}} S_{i,j;n+h,h'}(U_{i,j}) \frac{\partial}{\partial U_{i,j}} f_{n,m}(U_{i,j}) - S_{i,j,c}(v) \frac{\partial}{\partial v} f_{n,m}(v)$$

$$O_{i,j;n+h,h',m,3}^{(2)} = \frac{1}{U_{i,j}} S_{i,j;n+h,h'}(U_{i,j}) f_{n,m}(U_{i,j}) - \frac{1}{v} S_{i,j,c}(v) f_{n,m}(v)$$

les termes $O_{i,j;n,m}^{(0)}$, $O_{i,j;n,h,m,1}^{(1)}$ et $O_{i,j;n+h,m,2}^{(1)}$ ayant été déjà définis plus haut.

Pour calculer la partie $\vec{\mathcal{L}}_{i,j}^{(2)}$ de $\mathcal{L}^{(2)}$, il est nécessaire d'effectuer les produits tensoriels dyadiques associés aux vecteurs $\vec{\mathcal{A}}$ et $\vec{\mathcal{B}}$. On peut remarquer (à l'aide des relations (56) et (57) que tous les produits de ce type, pour lesquels les sommes $k+k'$ et $k+k'$ ne sont pas nulles ne contribuent pas à la partie diagonale du tenseur. Dans ces conditions, il suffit de calculer les produits tensoriels pour lesquels $k+k' = k+k' = 0$. On a alors les relations :

$$\sum_{k',k,k} \vec{\mathcal{A}}(n+1, m+k) \vec{\mathcal{A}}(n, m) = \frac{n+1}{2n+1}$$

$$\sum_{k',k,k} \vec{\mathcal{A}}(n-1, m+k) \vec{\mathcal{A}}(n, m) = \frac{n}{2n+1}$$

et, de même, sous une forme plus condensée :

$$\begin{aligned} \sum_{k=-1} \vec{\mathcal{B}} \vec{\mathcal{A}} &= (n+1)(n+2) / (2n+1) \\ \sum_{k=-1} \vec{\mathcal{B}} \vec{\mathcal{A}} &= -n(n-1) / (2n+1) \\ \sum_{k=-1} \vec{\mathcal{A}} \vec{\mathcal{B}} &= -n(n+1) / (2n+1) \\ \sum_{k=-1} \vec{\mathcal{A}} \vec{\mathcal{B}} &= n(n+1) / (2n+1) \\ \sum_{k=-1} \vec{\mathcal{B}} \vec{\mathcal{B}} &= -n(n+1)(n+2) / (2n+1) \\ \sum_{k=-1} \vec{\mathcal{B}} \vec{\mathcal{B}} &= -n(n-1)(n+1) / (2n+1) \end{aligned} \quad (66)$$

Si, maintenant, on pose :

$$\vec{\mathcal{E}}_i = \langle \vec{\nabla}^0 \vec{\nabla} \rangle : \vec{\mathcal{J}}$$

et si l'on explicite le terme $\vec{\nabla}_i \vec{\mathcal{D}}_{i,j}$ de la même manière que les opérateurs $\vec{\mathcal{O}}_{i,j}^{(r)}$, il vient, à l'aide des relations (66) :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{V}}_{i,j}^{(0)} &= \frac{1}{3} \vec{\mathcal{E}}_i \sum_{n,m} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} O_{i,j;n,m}^{(0)} + \frac{1}{2} O_{i,j;n,m,1}^{(2)} - \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{n+1}{2n+1} O_{i,j;n+1,m,1}^{(1)} + \frac{n}{2n+1} O_{i,j;n-1,m,1}^{(1)} \right] - \right. \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{1}{v} \left(\frac{n(n+1)}{2n+1} (O_{i,j;n-1,m,2}^{(1)} - O_{i,j;n+1,m,2}^{(1)}) \right) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} O_{i,j;n,m}^{(0)} - \frac{1}{v} \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2n+1} O_{i,j;n+1,m,1}^{(1)} - \frac{n(n-1)}{2n+1} O_{i,j;n-1,m,1}^{(1)} \right] - \\ &\quad - n(n+1) \frac{1}{2\sqrt{v^2}} \left[O_{i,j;n,m}^{(0)} + v O_{i,j;n,m,3}^{(2)} + \left(\frac{n+2}{2n+1} O_{i,j;n+1,m,2}^{(1)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{n-1}{2n+1} O_{i,j;n-1,m,2}^{(1)} \right) \right] + \frac{1}{v} O_{i,j;n,m,4}^{(2)} \left\} Y_{n,m}(\theta, \varphi) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m}{M} \frac{1}{v^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \left[U_{i,j} v^2 a_{i,j;n}(v) f_{n,m}(U_{i,j}) \right] - U_{i,j}^2 b_{i,j;n}(v) f_{n,m}(U_{i,j}) \right\} Y_{n,m}(\theta, \varphi) \right. \end{aligned} \quad (7)$$

avec

$$\begin{aligned} Q_{i,j;n,m,4}^{(2)} &= s_{i,j;n}(v_{i,j}) \frac{\partial}{\partial v_{i,j}} f_{n,m}(v_{i,j}) - s_{i,j}^0(v) \frac{\partial}{\partial v} f_{n,m}(v) \\ a_{i,j;n}(v) &= s_{i,j;n}(v_{i,j}) - \frac{v_{i,j}}{v} \left[\frac{n+1}{2n+1} s_{i,j;n+1}(v_{i,j}) - \frac{n}{2n+1} s_{i,j;n}(v_{i,j}) \right] \\ b_{i,j;n}(v) &= \frac{n(n+1)}{2n+1} \left[s_{i,j;n+1}(v_{i,j}) - s_{i,j;n-1}(v_{i,j}) \right] \end{aligned}$$

Dans les expressions (65) et (67) ci-dessus, il n'a pas été utile d'explicitier les termes $Q_{i,j;n,m}^{(r)}$ dont l'écriture est assez complexe dans le cas général (i et j quelconques). Si l'on considère des collisions purement élastiques, on peut faire apparaître dans tous les termes $Q_{i,j;n,m}^{(r)}$, l'expression :

$$v_n(v) = s_{i,i;0}(v) - s_{i,i;n}(v)$$

Les relations (61), (62), (65) et (67) prennent alors la forme, plus simple :

$$\mathcal{L}_{i,i}^{(0)} = \sum_{n,m} v_n(v) f_{n,m}(v) \gamma_{n,m}(\theta, \varphi) \quad (68)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{i,i}^{(1)} &= \langle \vec{v} \rangle \sum_{n,m} \sum_{k,k'} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} [v_n(v) f_{n,m}(v)] - v_{n+k}(v) \frac{\partial}{\partial v} f_{n,m}(v) \right\} \mathcal{A}(n,m) \\ &\quad + \frac{1}{v} [v_n(v) - v_{n+k}(v)] f_{n,m}(v) \gamma_{n+k,m+k}(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (69)$$

$$\mathcal{L}_{i,i}^{(2)} = \langle \vec{v} \vec{v} \rangle : \sum_{n,m} \sum_{k',k''} \sum_{k,k'''} \{ \}$$

$$\begin{aligned} \{ \} &= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial v_n}{\partial v} - \frac{\partial^2 v_n}{\partial v^2} \right) f_{n,m} + \frac{1}{2v} (v_n + v_{n+k+k'}) \frac{\partial f_{n,m}}{\partial v} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial v} (v_{n+k} - v_n) \frac{\partial f_{n,m}}{\partial v} + \frac{1}{2} (2 v_{n+k} - v_n - v_{n+k+k'}) \frac{\partial^2 f_{n,m}}{\partial v^2} \right] \mathcal{A}(n+k, m+k) \mathcal{A}(n,m) \\ &\quad + \left[\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} (v_{n+k} - v_n) f_{n,m} + \frac{1}{2v^2} (v_n + v_{n+k+k'} - 2 v_{n+k}) f_{n,m} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{v} (v_{n+k} - v_n - v_{n+k+k'}) \frac{\partial f_{n,m}}{\partial v} \right] \mathcal{A}(n+k, m+k) \mathcal{A}(n,m) \\ &\quad + \frac{1}{v} v_{n+k} \frac{\partial f_{n,m}}{\partial v} \mathcal{B}(n+k, m+k) \mathcal{A}(n,m) \\ &\quad + \frac{1}{2v^2} (2 v_{n+k} - v_n - v_{n+k+k'}) f_{n,m} \mathcal{B}(n+k, m+k) \mathcal{B}(n,m) \end{aligned} \quad (70a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{i,i}^{(2)} &= \frac{1}{3} \mathcal{E}_i \left\{ \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[v^2 a_n(v) \frac{\partial f_{n,m}}{\partial v} \right] + \left[\frac{1}{v} \frac{\partial b_n(v)}{\partial v} - \frac{1}{2} \nabla_v^2 v_n - \frac{n(n+1)}{v^2} a_n \right] f_{n,m} \right\} \gamma_{n,m}(\theta, \varphi) \\ &\quad + \frac{m}{M} \left\{ \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[v^3 a_n(v) f_{n,m} \right] - b_n f_{n,m} \right\} \gamma_{n,m}(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (70b)$$

avec :

$$a_n(v) = -v_n + \frac{n+1}{2n+1} v_{n+1} + \frac{n}{2n+1} v_{n-1}$$

$$b_n(v) = \frac{n(n+1)}{2n+1} (v_{n-1} - v_{n+1})$$

Les relations (68), (69) et (70) ci-dessus ont été proposées pour la première fois par POZZOLI (Po-1), mais à partir de l'opérateur de collision élastique. Elles apparaissent ici comme un cas particulier plus simple de l'opérateur général. Naturellement, si l'on admet que la distribution des neutres est Maxwellienne, on retrouve à l'ordre zéro ($n=0$) l'opérateur de CHAPMAN et COWLING :

$$\mathcal{L}_{i,j;0,m}^{(2)} = \frac{\kappa T}{M} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[v^2 v_1 \frac{\partial f_{0,m}}{\partial v} \right] + \frac{m}{M} \frac{1}{v^2} \left[v^3 v_1 f_{0,m} \right] \quad (71)$$

III.3.2. Développement de l'opérateur (50).

Abstraction faite des termes $\vec{\mathcal{D}}_{i,j}^{ion}$ et $\mathcal{F}_{i,j}^{ion}$, l'opérateur (50) possède une structure globalement identique à celle de l'opérateur (47). Dans un premier temps, les seules modifications à apporter se situent au niveau de la définition des termes $\mathcal{Q}_{i,j;n,m}^{(r)}$. Ainsi, on retrouve les relations (61), (62), (65) et (67) mais on doit remplacer les $\mathcal{Q}_{i,j;n,m}^{(r)}$ par les $\mathcal{Q}_{i,j;n,m}^{ion(r)}$ définis par :

$$\mathcal{Q}_{i,j;n,m}^{ion(0)} = \int dv' \left[2 \frac{v'^2}{v^2} S_{i,j;n}^{ion}(v',v) f_{n,m}(v') - S_{i,j;0}^{ion}(v,v') f_{n,m}(v') \right] \quad (72a)$$

$$\mathcal{Q}_{i,j;n+k,m,1}^{ion(1)} = \int dv' \left[2 \frac{v'^2}{v^2} S_{i,j;n+k}^{ion}(v',v) \frac{\partial}{\partial v} f_{n,m}(v') - S_{i,j;0}^{ion}(v,v') \frac{\partial}{\partial v} f_{n,m}(v') \right] \quad (72b)$$

$$\mathcal{Q}_{i,j;n+k,m,2}^{ion(1)} = \int dv' \left[2 \frac{v'}{v} S_{i,j;n+k}^{ion}(v',v) f_{n,m}(v') - S_{i,j;0}^{ion}(v,v') f_{n,m}(v') \right] \quad (72c)$$

$$\mathcal{Q}_{i,j;n+k,k',m,1}^{ion(2)} = \int dv' \left\{ 2 \frac{v'^2}{v^2} S_{i,j;n+k+k'}^{ion}(v',v) \left[\frac{\partial^2}{\partial v'^2} f_{n,m}(v') - \frac{1}{v'} \frac{\partial}{\partial v'} f_{n,m}(v') \right] - \right. \\ \left. - S_{i,j;0}^{ion}(v,v') \left[\frac{\partial^2}{\partial v'^2} f_{n,m}(v') - \frac{1}{v'} \frac{\partial}{\partial v'} f_{n,m}(v') \right] \right\} \quad (72d)$$

$$\mathcal{Q}_{i,j;n+k+k',m,2}^{ion(2)} = \int dv' \left[2 \frac{v'^2}{v^2} S_{i,j;n+k+k'}^{ion}(v',v) \frac{\partial}{\partial v} f_{n,m}(v') - S_{i,j;0}^{ion}(v,v') \frac{\partial}{\partial v} f_{n,m}(v') \right] \quad (72e)$$

$$\mathcal{Q}_{i,j;n+k,k',m,3}^{ion(2)} = \int dv' \frac{1}{v} \left[2 S_{i,j;n+k+k'}^{ion}(v',v) f_{n,m}(v') - S_{i,j;0}^{ion}(v,v') f_{n,m}(v') \right] \quad (72f)$$

$$\mathcal{Q}_{i,j;n,m,4}^{ion(2)} = \int dv' \frac{1}{v} \left[2 \frac{v'}{v} S_{i,j;n}^{ion}(v',v) \frac{\partial}{\partial v'} f_{n,m}(v') - S_{i,j;0}^{ion}(v,v') \frac{\partial}{\partial v} f_{n,m}(v') \right] \quad (72g)$$

avec

$$S_{i,j;n}^{ion}(v,v') = N_i v \int d\Omega' \int d\Omega'' \sigma_{i,j}^{ion}(v,v',X',X'') P_n(\cos X')$$

L'explicitation de $\vec{\nabla}_v \cdot \vec{\mathcal{D}}_{i,j}^{ion}$ et de $\mathcal{F}_{i,j}^{ion}$ est un peu plus délicate car on ne retrouve pas la même symétrie que précédemment. On doit poser :

$$S_{i,j;n}^{ion(1)}(v,v') = N_i v \int d\Omega' \int d\Omega'' \cos X'' \sigma_{i,j}^{ion}(v,v',X',X'') P_n(\cos X')$$

Alors :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_v \cdot \vec{D}_{i,j}^{ion} = \sum_{n,m} \left\{ \int dv' \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{v'^2}{v} a_{i,j;n}^{ion}(v') f_{n,m}(v') \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{v'^2}{v^2} \left[2 a_{i,j;n}^{ion}(v') - \frac{v'}{v} b_{i,j;n}^{ion}(v') \right] f_{n,m}(v') + \frac{\partial}{\partial v} \left[u_{is} \frac{v'^2}{v^2} c_{i,j;n}^{ion(1)}(v') f_{n,m}(v') \right] \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{v} \left[u_{is} \frac{v'^2}{v^2} \left(2 c_{i,j;n}^{ion(1)}(v') + b_{i,j;n}^{ion(1)}(v') \right) \right] f_{n,m}(v') \right] \right\} Y_{n,m}(\theta, \varphi) \quad (73) \end{aligned}$$

avec :

$$a_{i,j;n}^{ion}(v') = s_{i,j;n}^{ion}(v') + \frac{v'^2}{v^2} \left[\frac{n+1}{2n+1} s_{i,j;n+1}^{ion}(v') + \frac{n}{2n+1} s_{i,j;n-1}^{ion}(v') \right] \quad (73a)$$

$$b_{i,j;n}^{ion}(v') = \frac{n(n+1)}{2n+1} \left[s_{i,j;n+1}^{ion}(v') - s_{i,j;n-1}^{ion}(v') \right] \quad (73b)$$

$$c_{i,j;n}^{ion(1)}(v') = \frac{n+1}{2n+1} s_{i,j;n+1}^{ion(1)}(v') + \frac{n}{2n+1} s_{i,j;n-1}^{ion(1)}(v') \quad (73c)$$

$$b_{i,j;n}^{ion(1)}(v') = \frac{n(n+1)}{2n+1} \left[s_{i,j;n+1}^{ion(1)}(v') - s_{i,j;n-1}^{ion(1)}(v') \right] \quad (73d)$$

Enfin, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{i,j}^{ion} = \sum_{n,m} 6 \frac{m}{M} \left\{ \int dv' \left[\frac{v'^2}{v^2} s_{i,j;n}^{ion}(v') f_{n,m}(v') \right. \right. \\ \left. \left. + (v_{is}^{ion})^2 \left[\frac{1}{v'} \frac{\partial}{\partial v'} (d_{i,j;n}^{ion}(v')) - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} (d_{i,j;n}^{ion}(v')) \right] \right] \right\} \quad (74) \end{aligned}$$

avec :

$$d_{i,j}^{ion}(v') = \frac{v'^2}{v^2} s_{i,j;n}^{ion}(v') f_{n,m}(v') \quad (74a)$$

et :

$$(v_{is}^{ion})^2 = v'^2 - v^2 + \frac{2}{m} \mathcal{E}_{i,j}$$

Jusqu'à présent, on s'est contenté d'effectuer une étude mathématique des opérateurs de collision sans trop se préoccuper de son incidence sur le plan physique. D'ailleurs, je n'ai donné encore aucune précision sur la nature des particules en présence, l'hypothèse de faible rapport des masses étant seule nécessaire à la bonne conduite des calculs. En fait, les opérateurs que j'ai obtenus peuvent s'appliquer à des situations très diverses que ce soit en physique des milieux ionisés ou en théorie cinétique des gaz, dès l'instant qu'un gaz léger est diffusé par un gaz lourd dont la distribution des molécules est quelconque.

L'application des opérateurs (47) et (50) pour les collisions électron-molécule d'un gaz faiblement ionisé se réduit en général à l'utilisation de l'ensemble des relations (47) dans le cas des collisions élastiques et de (47b) et (50c) (pour $r=0$) dans le cas des collisions inélastiques et de l'ionisation. Par suite du très faible rapport des masses de l'électron et de la molécule il semble justifié de négliger le recul élastique de la molécule au cours des collisions de type inélastique. Cette approximation est très correcte tant que la variation de l'énergie au cours de l'excitation est grande comparée à l'énergie de la particule avant le choc. Dans le cas contraire, il

est clair qu'il faut tenir compte de ces termes de recul. C'est ce qui se produit en particulier dans l'excitation des niveaux de vibration ou de rotation de la plupart des gaz moléculaires et cela d'autant mieux que le rapport champ électrique sur pression est plus faible. Dans ces conditions, on ne peut plus se limiter strictement à (47b) et c'est l'ensemble des termes de (47), quelles que soient les valeurs de i et j , qu'il faut prendre en considération. Je traiterai ce cas au cours de la deuxième partie de ce travail.

En théorie cinétique des gaz neutres où le rapport des masses des particules en présence est toujours beaucoup plus élevé que pour un gaz électron molécule et dès l'instant que l'on est en présence d'un gaz léger nettement plus "chaud" que le gaz lourd diffuseur (cas des ondes de choc par exemple) l'utilisation des relations (47) et (50) semble être nécessaire.

Il en est de même en neutronique dans l'étude du ralentissement d'un gaz de neutrons bien plus chaud que le milieu ambiant.

Dans ce qui va suivre, je me propose d'appliquer l'étude générale précédente au cas d'un gaz faiblement ionisé. La deuxième partie de ce travail, consacrée à l'étude d'un milieu homogène, en constitue la première étape.

XXXXX

1.1. COLLISIONS CONSERVATIVES.

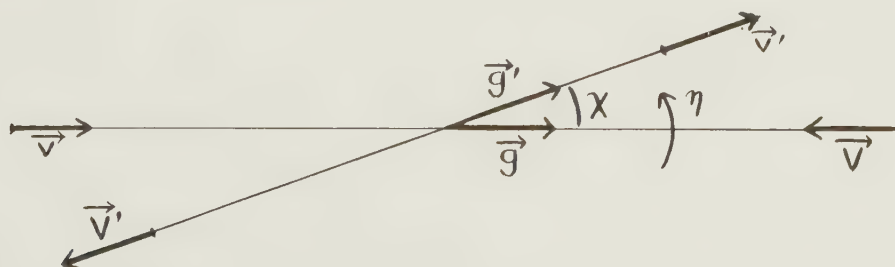
Avant le choc	Après le choc
$\vec{v}$, vitesse de la particule incidente	$\vec{v}'$, vitesse de la particule diffusée
$\vec{V}$, vitesse de la molécule cible	$\vec{V}'$, vitesse de la molécule cible
$\vec{g} = \vec{v} - \vec{V}$, vitesse relative	$\vec{g}' = \vec{v}' - \vec{V}'$, vitesse relative
$\vec{w} = \frac{m\vec{v} + M\vec{V}}{m + M}$, vitesse du centre de masse	$\vec{w}' = \frac{m\vec{v}' + M\vec{V}'}{m + M}$, vitesse du centre de masse
$\vec{v} = \vec{w} + (m^*/m) \vec{g}$	$\vec{v}' = \vec{w}' + (m^*/m) \vec{g}'$
$\vec{V} = \vec{w} - (m^*/M) \vec{g}$	$\vec{V}' = \vec{w}' - (m^*/M) \vec{g}'$
$\vec{v} = (v, \theta, \varphi)$	$\vec{v}' = (v', \theta', \varphi')$
$d\omega = \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$	$d\omega' = \sin \theta' \, d\theta' \, d\varphi'$
$\mu = \cos \theta$	$\mu' = \cos \theta'$

$(\vec{g}, \vec{g}') = (\chi, \eta)$, déviation dans le système du centre de masse ;

$d\Omega = \sin \chi \, d\chi \, d\eta$, angle solide associé ;

$(\vec{v}, \vec{v}') = (\theta^*, \varphi^*)$, déviation de la particule incidente dans le système du laboratoire ;

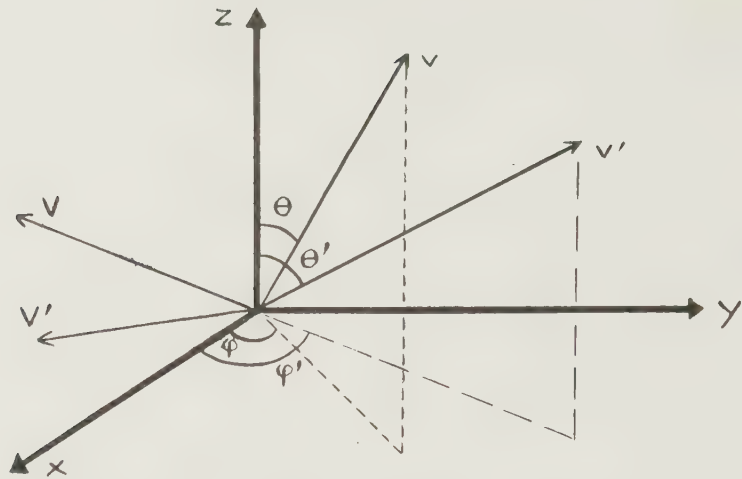
$d\omega^* = \sin \theta^* \, d\theta^* \, d\varphi^*$, angle solide associé.



DESCRIPTION DE LA COLLISION DANS LE SYSTEME DU CENTRE DE MASSE.

$$\frac{2}{m} \varepsilon_i + g^2 = \frac{2}{m} \varepsilon_j + g'^2$$

$$\vec{V} = \vec{V} + \frac{m}{M} (\vec{v} - \vec{v}')$$



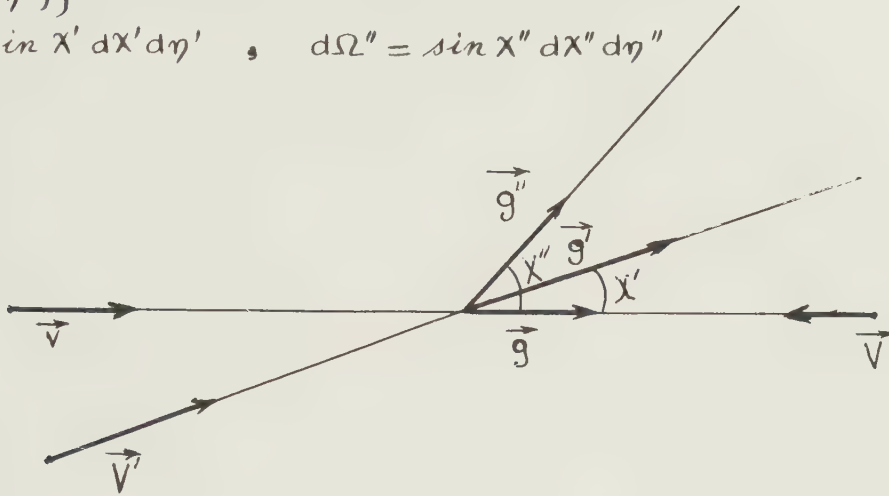
DESCRIPTION DE LA COLLISION DANS LE SYSTEME DU LABORATOIRE.

1.2. COLLISIONS NON CONSERVATIVES (IONISATION).

Avant le choc	Après le choc
$\vec{v}$, vitesse de la particule incidente $\vec{V}$, vitesse de la molécule cible $\vec{g} = \vec{v} - \vec{V}$, vitesse relative $\vec{w} = \frac{m\vec{v} + M\vec{V}}{m + M}$, vitesse du centre de masse $\vec{v} = \vec{w} + (m^*/m) \vec{g}$ $\vec{V} = \vec{w} - (m^*/M) \vec{g}$ $\vec{v} = (v, \theta, \varphi)$ $d\omega = \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$ $\mu = \cos \theta$	$\vec{v}', \vec{v}'$, vitesses des particules diffusées $\vec{V}'$, vitesse de la molécule cible $\vec{g}' = \vec{v}' - \vec{V}'$, vitesse relative $\vec{g}'' = \vec{v}'' - \vec{V}'$, vitesse relative $\vec{w}' = \frac{m\vec{v}'' + m\vec{v}' + (M-m)\vec{V}'}{m + M}$ $\vec{v}' = \vec{w}' + \frac{M}{m+M} \vec{g}' - \frac{m}{m+M} \vec{g}''$ $\vec{v}'' = \vec{w}' + \frac{M}{m+M} \vec{g}'' - \frac{m}{m+M} \vec{g}'$ $\vec{V}' = \vec{w}' - \frac{m}{m+M} (\vec{g}' + \vec{g}'')$ $\vec{v}' = (v', \theta', \varphi')$ $d\omega' = \sin \theta' \, d\theta' \, d\varphi'$ $\mu' = \cos \theta'$ $d\omega'' = \sin \theta'' \, d\theta'' \, d\varphi''$ $\mu'' = \cos \theta''$

$$\left. \begin{aligned} (\vec{g}, \vec{g}') &= (\chi', \eta') \\ (\vec{g}, \vec{g}'') &= (\chi'', \eta'') \end{aligned} \right\} \text{déviation dans le système du centre de masse}$$

$$d\Omega' = \sin \chi' d\chi' d\eta' \quad , \quad d\Omega'' = \sin \chi'' d\chi'' d\eta''$$



DESCRIPTION DE LA COLLISION DANS LE SYSTEME DU CENTRE DE MASSE.

$$\frac{2}{m^*} \epsilon_i + g^2 = \frac{2}{m^*} \epsilon_j + g'^2 + g''^2 - \frac{2m}{M} \vec{g}' \cdot \vec{g}''$$

$$\vec{V}' = \frac{M}{M-m} \vec{V} + \frac{m}{M-m} (\vec{v} - \vec{v}' - \vec{v}'')$$



XXXXX

Soit à démontrer les relations :

$$\int \vec{\nabla}_{\vec{v}'} \mathcal{L}_{i,j}(\vec{v}, \vec{v}') \underline{dv'} = 0 \quad (1)$$

$$\int \vec{\nabla}_{\vec{v}'} \left[v' \mathcal{L}_{i,j}(\vec{v}, \vec{v}') \right] \underline{dv'} = 0 \quad (2)$$

$$\int \vec{\nabla}_{\vec{v}'} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}'} \mathcal{L}_{i,j}(\vec{v}, \vec{v}') \underline{dv'} = 0 \quad (3)$$

$$\int \vec{\nabla}_{\vec{v}'} \left[f(\vec{v}') \mathcal{L}_{i,j}(\vec{v}, \vec{v}') \right] \underline{dv'} = 0 \quad (4)$$

avec

$$\mathcal{L}_{i,j}(\vec{v}, \vec{v}') = \frac{v}{v'^2} \sigma_{i,j}(v, \chi) \delta(v' - \overline{\omega}^{(0)} v)$$

et
$$\overline{\omega}^{(0)} = \left[1 + \frac{2}{m} \frac{\mathcal{E}_{i,j}}{v^2} \right]^{-1/2}$$

Etudions tout d'abord le comportement de $\mathcal{L}_{i,j}(\vec{v}, \vec{v}')$ lorsqu'une composante (par exemple v'_x) de $\vec{v}'$ tend vers plus ou moins l'infini.

On a :

$$\delta(v' - \overline{\omega}^{(0)} v) = \delta[h(v'_x)] \quad \text{avec} \quad h(v'_x) = \left[v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2 \right]^{1/2} - \overline{\omega}^{(0)} v$$

et

$$\delta[h(v'_x)] = \delta(v'_x - v'^*) \frac{v}{v'^*} \overline{\omega}^{(0)}$$

$$v'^* = \left[\overline{\omega}^{(0)2} v^2 - (v_y'^2 + v_z'^2) \right]^{1/2}$$

d'où immédiatement, compte tenu des propriétés des fonctions de Dirac :

$$\lim_{v'_x \rightarrow \pm \infty} \mathcal{L}_{ij}(\vec{v}, \vec{v}') = 0, \quad \forall \vec{v} \quad (5)$$

Les relations (1) à (4) se démontrent alors aisément en intégrant par partie et en tenant compte de (5). Par exemple pour la composante selon Ox de (1) :

$$\int dv'_y dv'_z \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dv'_x} [\mathcal{L}_{ij}(\vec{v}, \vec{v}')] dv'_x = \int dv'_y dv'_z \left[\mathcal{L}_{ij}(\vec{v}, \vec{v}') \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

avec deux relations identiques pour les autres composantes. De même pour les termes diagonaux, du dyade $\vec{v}_v \vec{v}_v$ de (3), on a évidemment :

$$\int dv'_y dv'_z \frac{d}{dv'_z} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dv'_x} [\mathcal{L}_{ij}(\vec{v}, \vec{v}')] dv'_x = 0$$

Pour les termes diagonaux, il vient :

$$\int dv'_y dv'_z \left[\frac{d}{dv'_x} [\mathcal{L}_{ij}(\vec{v}, \vec{v}')] \right]_{-\infty}^{+\infty}$$

La dérivée de $\mathcal{L}_{ij}(\vec{v}, \vec{v}')$ par rapport à v'_x conduit à la somme des deux termes fonctions respectivement de $\delta(v' - \bar{\omega}^{(v)} v)$ et de $\frac{d}{dv'_x} [\delta(v' - \bar{\omega}^{(v)} v)]$ et qui sont nuls pour les mêmes raisons que précédemment.

XXXXX

Dans ce qui suit, on fera un usage constant des relations suivantes (Ba-1) :

$$\sin \theta \, P_n^m(\cos \theta) = \frac{1}{2n+1} \left[B(n+m) P_{n-1}^{m-1}(\cos \theta) - A(n-m) P_{n+1}^{m-1}(\cos \theta) \right] \quad (1)$$

$$\sin \theta \, P_n^m(\cos \theta) = \frac{1}{2n+1} \left[P_{n+1}^{m+1}(\cos \theta) - P_{n-1}^{m+1}(\cos \theta) \right] \quad (2)$$

$$\cos \theta \, P_n^m(\cos \theta) = \frac{1}{2n+1} \left[(n+m) P_{n-1}^m(\cos \theta) + (n-m+1) P_{n+1}^m(\cos \theta) \right] \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m(\cos \theta) = m \frac{\cos \theta}{\sin \theta} P_n^m(\cos \theta) - P_n^{m+1}(\cos \theta) \quad (4)$$

$$P_n^{m+1}(\cos \theta) = 2m \frac{\cos \theta}{\sin \theta} P_n^m(\cos \theta) - (n-m+1)(n+m) P_n^{m-1}(\cos \theta) \quad (5)$$

dans lesquelles on a posé :

$$B(n+m) = (n+m)(n+m-1) \quad A(n-m) = (n-m+2)(n-m+1)$$

I.3.1. Action sur $Y_{n,m}(\theta, \varphi)$ du vecteur unitaire $\frac{\vec{v}}{v}$.

I.3.1.1. *Calcul de la composante selon l'axe Ox :*

Soit :

$$U_x = \left[\frac{\vec{v}}{v} \right]_x Y_{n,m}(\theta, \varphi) = \sin \theta \cos \varphi \, P_n^m(\cos \theta) (\cos m\varphi + i \sin m\varphi) \quad (6)$$

$$U_x = \frac{1}{2} \sin \theta \, P_n^m(\cos \theta) \left\{ \left[\cos(m-1)\varphi + i \sin(m-1)\varphi \right] + \left[\cos(m+1)\varphi + i \sin(m+1)\varphi \right] \right\} \quad (7)$$

compte tenu des relations (1) et (2), il est facile de voir que pour tout m différent de zéro, on a :

$$U_x = \frac{1}{2(2n+1)} \left[B(n+m) Y_{n-1, m-1}(\theta, \varphi) - A(n-m) Y_{n+1, m-1}(\theta, \varphi) + Y_{n+1, m+1}(\theta, \varphi) - Y_{n-1, m+1}(\theta, \varphi) \right] \quad (8)$$

Pour $m=0$, le calcul ci-dessus doit être repris car $Y_{n,m}(\theta, \varphi)$ dégénère en $P_n^0(\cos \theta)$. Dans ce cas, on obtient :

$$U_x = \frac{1}{2n+1} \left[P_{n+1}^1(\cos \theta) - P_{n-1}^1(\cos \theta) \right] \cos \varphi \quad (8a)$$

Il est possible de rassembler les expressions (8) et (8a) en faisant intervenir le symbole de Kronecker, $\delta_{0,m}$. Il vient :

$$U_x = \frac{1-\delta_{0,m}}{2(2n+1)} \left[B(n+m) Y_{n-1, m-1}(\theta, \varphi) - A(n-m) Y_{n+1, m-1}(\theta, \varphi) \right] + \frac{1+\delta_{0,m}}{2(2n+1)} \left[Y_{n+1, m+1}(\theta, \varphi) - Y_{n-1, m+1}(\theta, \varphi) \right] \quad (9)$$

I.3.1.2. Calcul des composantes selon O_y et O_z :

A l'aide des relations (1) et (2) pour U_y et de la relation (3) pour U_z , on obtient respectivement :

$$U_y = i \frac{1-\delta_{0,m}}{2(2n+1)} \left[B(n+m) Y_{n-1, m-1}(\theta, \varphi) - A(n-m) Y_{n+1, m-1}(\theta, \varphi) \right] - i \frac{1+\delta_{0,m}}{2(2n+1)} \left[Y_{n+1, m+1}(\theta, \varphi) - Y_{n-1, m+1}(\theta, \varphi) \right] \quad (10)$$

$$U_z = \frac{1}{2n+1} \left[(n+m) Y_{n-1, m}(\theta, \varphi) + (n-m+1) Y_{n+1, m}(\theta, \varphi) \right] \quad (11)$$

Finalement en rassemblant les expressions (9), (10) et (11), on obtient la relation (55a) du paragraphe III.1 avec $\mathcal{A}(n,m)$ défini par les relations (56).

I.3.2. Action sur $Y_{n,m}(\theta, \varphi)$ du vecteur $\sqrt{\nabla_v}$.

I.3.2.1. Calcul de la composante selon l'axe O_x :

On a :

$$Z_x = \left[\sqrt{\nabla_v} \right]_x Y_{n,m}(\theta, \varphi) = \left[\cos \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] Y_{n,m}(\theta, \varphi)$$

$$Z_x = \frac{1}{2} \left[\cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m(\cos \theta) - \frac{m}{\sin \theta} P_n^m(\cos \theta) \right] \left[\cos(m+1)\varphi + i \sin(m+1)\varphi \right] \\ + \frac{1}{2} \left[\cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m(\cos \theta) + \frac{m}{\sin \theta} P_n^m(\cos \theta) \right] \left[\cos(m-1)\varphi + i \sin(m-1)\varphi \right]$$

Traitant séparément les termes en $m+1$ et en $m-1$ ci-dessus et en utilisant respectivement les relations (3), (4), (2) et (3) pour les premiers et les relations (4), (5), (2) et (3) pour les seconds, on obtient :

$$Z_x = - \frac{1+\delta_{0,m}}{2(2n+1)} \left[n Y_{n+1,m+1}(\theta, \varphi) + (n+1) Y_{n-1,m+1}(\theta, \varphi) \right] \\ + \frac{1-\delta_{0,m}}{2(2n+1)} \left[(n+1) B(n+m) Y_{n-1,m-1}(\theta, \varphi) + n A(n-m) Y_{n+1,m-1}(\theta, \varphi) \right] \quad (12)$$

I.3.2.2. Calcul des composantes selon O_y et O_z :

A l'aide des relations (2) à (5) pour Z_y et des relations (2), (3) et (4) pour Z_z , il vient, en procédant comme ci-dessus :

$$Z_y = i \frac{1+\delta_{0,m}}{2(2n+1)} \left[n Y_{n+1,m+1}(\theta, \varphi) + (n+1) Y_{n-1,m+1}(\theta, \varphi) \right] \\ + i \frac{1-\delta_{0,m}}{2(2n+1)} \left[(n+1) B(n+m) Y_{n-1,m-1}(\theta, \varphi) + n A(n-m) Y_{n+1,m-1}(\theta, \varphi) \right] \quad (13)$$

$$Z_z = \frac{1}{2n+1} \left[(n+1)(n+m) Y_{n-1,m}(\theta, \varphi) - n(n-m+1) Y_{n+1,m}(\theta, \varphi) \right] \quad (14)$$

Les relations (12), (13) et (14) ci-dessus, montrent clairement que le vecteur $\sqrt{\frac{n}{2}} \vec{V}_n Y_{n,m}(\theta, \varphi)$ s'exprime en terme des vecteurs $\vec{B}_{(n,m)}$ définis par les relations (56) du paragraphe III.1. On est alors conduit à l'expression (55b) du même paragraphe.



DEUXIEME PARTIE

ETUDE DE L'EQUATION DE BOLTZMANN DANS LE CAS
D'UN MILIEU HOMOGENE ET STATIONNAIRE

Dans cette deuxième partie, je me propose de développer l'étude microscopique d'un milieu faiblement ionisé, stationnaire et homogène, soumis à un champ électrique uniforme et constant. Cette situation se rencontre, par exemple, dans une décharge de type Townsend, établie entre deux électrodes planes et parallèles, à condition de se placer suffisamment loin des parois de manière à ce qu'un état d'équilibre soit atteint. L'étude d'une telle décharge est d'une grande importance, car c'est précisément dans ce cas que les déterminations expérimentales des grandeurs macroscopiques (vitesse de dérive, coefficient de diffusion, premier coefficient de Townsend, etc...) s'effectuent en général. Même si l'on se limite à la situation la plus simple possible pour laquelle on ne tient compte que des interactions électron-molécule en négligeant les processus de seconde espèce (désexcitation, transfert de rayonnement) ainsi que l'influence de la charge d'espace, l'équation de Boltzmann définie au cours de la première partie présente de grandes difficultés de résolution. En général on effectue le développement en série de fonctions sphériques proposé plus haut et qui dans ce cas, par suite des symétries de révolution, se réduit à un simple développement en série de polynômes de Legendre. Les anisotropies successives de la fonction de distribution obéissent alors à un système infini d'équations, couplées entr'elles par l'intermédiaire des termes rendant compte de l'effet du champ électrique.

La méthode de résolution habituelle de ce système est basée sur la constatation que le couplage disparaît si le champ électrique est nul. Dans ces conditions, si la situation physique est telle que l'on puisse considérer l'action du champ électrique comme une très faible perturbation du système, il sera naturel de développer la fonction de distribution en série des puissances successives du champ. De manière plus précise, on pourra adopter comme petit paramètre du développement une quantité de l'ordre de grandeur de $\gamma/(\langle v \rangle \langle V \rangle)$ ou $\langle v \rangle$ représente une fréquence moyenne de collision et $\langle V \rangle$ la vitesse quadratique moyenne des molécules. Si l'on désigne par v_E la vitesse gagnée par l'électron le long d'un libre parcours moyen, il est facile de voir que $\gamma/(\langle v \rangle \langle V \rangle)$ est égal à $v_E / \langle V \rangle$. De même, si l'on désigne par t_{el} la durée d'un libre parcours moyen de l'électron et par t_E le temps mis par cet électron, initialement au repos, pour atteindre, sous la seule influence du champ la vitesse quadratique moyenne des molécules, il est clair que $\gamma/(\langle v \rangle \langle V \rangle)$ est identique à t_{el} / t_E . Il résulte de ce qui précède que le rapport $\gamma/(\langle v \rangle \langle V \rangle)$ (ou t_{el} / t_E) représente une mesure de l'importance relative du champ électrique et des collisions. Sa grandeur sera faible tant que la variation de la vitesse de l'électron le long d'un libre parcours moyen sera inférieure à la vitesse quadratique moyenne des molécules. Si l'on se place dans une telle situation et si l'on porte le développement de la fonction de distribution ainsi obtenu dans l'équation de Boltzmann initiale, on aboutit à un système d'équations qui, une fois décomposé en série d'harmoniques sphériques, ne présente plus de couplage entre les différentes anisotropies. Il est alors possible de déterminer ces anisotropies, en procédant de proche en proche et en s'arrêtant lorsque la précision est jugée suffisante, compte tenu de l'ordre de grandeur du champ électrique appliqué. Ce travail a été effectué par BAYET et alii (Ba-1) à (Ba-4) dans le cas d'un gaz de Lorentz homogène soumis à l'influence d'un champ électromagnétique. Comme on pouvait l'espérer par suite de la faible valeur du rapport $\gamma/(\langle v \rangle \langle V \rangle)$, on est conduit à une fonction de distribution quasi maxwellienne à la température T des molécules, les écarts à l'équilibre Maxwellien étant directement liés à l'action perturbatrice du champ.

Ceci étant, si l'on se propose maintenant d'effectuer la résolution de l'équation de Boltzmann pour un champ électrique d'intensité telle que $\gamma/(\langle v \rangle \langle v \rangle)$ ne soit plus un petit paramètre (ce qui est en général le cas dans la plupart des décharges classiques), il n'est plus possible d'effectuer le développement défini ci-dessus. Toutefois, on tourne alors aisément la difficulté en adoptant un nouveau petit paramètre défini par $\gamma/(\langle v \rangle \langle v \rangle)$ où $\langle v \rangle$ représente la vitesse quadratique moyenne des électrons. La grandeur t_e définie plus haut désigne maintenant le temps mis par l'électron initialement au repos, pour atteindre, sous la seule influence du champ, la vitesse quadratique moyenne des électrons. Il est clair que l'utilisation de ce nouveau développement s'imposera dès que l'on aura l'inégalité $\langle v \rangle \gg \langle v \rangle$, équivalente d'ailleurs à $T_e \gg T$, où T_e désigne la température électronique définie en admettant la fonction de distribution maxwellienne. Si le champ électrique appliqué est encore suffisamment faible de manière à ce que l'on puisse négliger l'influence des collisions inélastiques, la méthode ci-dessus conduit en première approximation pour la partie isotrope de la fonction de distribution, à la distribution de Margenau-Davydov. Dans le cas d'une section efficace constante, cette distribution se réduit à celle également classique de Druyvesteyn.

S'il est nécessaire de faire intervenir les collisions inélastiques le problème est plus délicat et on n'aboutit plus à une expression analytique simple pour la partie isotrope de la fonction de distribution.

Les deux cas évoqués ci-dessus, correspondent à des situations où le champ électrique joue un rôle inférieur à celui des collisions, autorisant en principe le calcul de proche en proche des termes successifs du développement. Ce calcul est rendu possible par la présence du petit paramètre $\gamma/(\langle v \rangle \langle v \rangle)$ qui entraîne le découplage des harmoniques successifs. Si, maintenant, on s'intéresse à un milieu dans lequel champ électrique et collisions agissent avec la même intensité, $\gamma/(\langle v \rangle \langle v \rangle)$ n'est plus un petit paramètre et la méthode de résolution ci-dessus ne peut plus s'appliquer. A ma connaissance, et bien que ce type de situation se rencontre couramment dans les décharges, il n'existe pas dans la littérature, d'étude théorique de ce problème reposant sur l'équation de Boltzmann. La plupart des auteurs se contentent alors de conserver les équations obtenues dans le cas où $\gamma/(\langle v \rangle \langle v \rangle)$ est suffisamment faible. L'un des buts de mon travail est de combler cette lacune en proposant une méthode de résolution de l'équation de Boltzmann pour le cas évoqué ci-dessus où $\gamma/(\langle v \rangle \langle v \rangle)$ est de l'ordre de l'unité, c'est-à-dire en général pour les hautes valeurs du rapport champ électrique sur pression. Toutefois, il me semble nécessaire auparavant d'étudier en détail les situations précédentes caractérisées par un rapport $\gamma/(\langle v \rangle \langle v \rangle)$ inférieur à un. En effet, et bien que la plupart des travaux dans ce domaine soient basés sur un développement en série d'un petit paramètre, l'usage que l'on fait de ce développement n'est pas le même partout. Par ailleurs, la justification physique précise de ce mode de résolution, n'est pas fournie uniformément par tous les auteurs ce qui conduit à des interprétations différentes des résultats obtenus. Ainsi, les conclusions diffèrent elles selon que l'on a affaire aux écoles françaises (Ba-1 à Ba-4), (Ja-1), italiennes (Br-2), (Ma-4), américaines (Ma-2), etc... Par ailleurs, et mis à part l'une des écoles italiennes (école de Milan (Ma-4)) les conditions précises de l'existence d'un état stationnaire ne sont pas toujours précisées, les auteurs travaillant dès le départ sur la forme stationnaire et homogène de l'équation de Boltzmann. Or, l'existence d'un état stationnaire et homogène n'est pas une donnée en soi du problème. Elle est conditionnée par la création d'un état d'équilibre entre les différents processus qui font gagner ou perdre de l'énergie aux électrons. Bien que l'on puisse penser a priori que toute situation où l'action des collisions est au moins égale à celle

du champ puisse conduire à un état stationnaire homogène, il n'en reste pas moins qu'il est préférable de pouvoir dans tous les cas garantir par le calcul l'existence d'un tel état.

Cette étude peut s'effectuer au moyen de la méthode dite des "échelles de temps multiples", utilisée d'ordinaire pour la fermeture de la hiérarchie de B. B. G. K. Y.. Cette méthode a été appliquée à la résolution de l'équation de Boltzmann par CALDIROLA, DE BARBIERI et MAROLI (Ca-1) dans le cas d'un plasma froid faiblement ionisé soumis à un champ de haute fréquence. Le principe de la méthode est basé sur l'existence de différents temps caractéristiques dans l'évolution du système considéré. Ces temps caractéristiques sont liés à la présence d'un petit paramètre spécifique du système et en fonction duquel s'effectue le développement de la fonction de distribution. Il existe une infinité de temps caractéristiques affectés chacun d'une unité de temps propre, d'autant plus grande que le rang du temps correspondant dans le développement est plus élevé. Tout développement en série des puissances d'un petit paramètre entraîne en général l'existence de termes dits "séculaires" qui croissent indéfiniment. Bien que n'étant pas liés à la nature de la convergence uniforme du développement, ces termes détruisent son caractère asymptotique qui veut que tout terme d'ordre supérieur soit une petite correction du terme qui précède et cela uniformément. L'une des idées de base de la méthode des échelles de temps multiples (M. E. T. M.) est d'imposer son caractère asymptotique au développement en supprimant tous les termes séculaires : ce sont les conditions de disparition de ces termes séculaires qui fournissent les équations de base pour l'étude du problème. La M. E. T. M. implique également l'existence d'une fonction de distribution "étendue" définie sur l'espace infini des temps caractéristiques dont les propriétés en fonction des temps successifs découlent des conditions imposées pour la disparition des termes séculaires.

L'utilisation de cette méthode est très bien indiquée si l'on veut décrire l'évolution temporelle du système. Cependant, si l'on est simplement intéressé par la mise en évidence de l'existence d'un état stationnaire homogène, il ne semble pas utile d'adopter cette procédure. On verra plus loin que l'existence d'un état stationnaire peut être étudiée sans l'aide des fonctions "étendues". Toutefois, la notion de temps caractéristique conserve toute sa valeur et c'est à leur définition que je vais m'intéresser dans un premier temps.

C H A P I T R E I

ETABLISSEMENT DES EQUATIONS POUR UN MILIEU HOMOGENE ET STATIONNAIRE

>>>>>>>

1.1. DEFINITION DES TEMPS CARACTERISTIQUES DU SYSTEME.

Chaque opérateur de l'équation de Boltzmann agit de manière différente sur la fonction de distribution selon la situation physique considérée. On peut caractériser l'importance de l'action de chacun de ces opérateurs en leur associant un "temps" unitaire, homogène à l'inverse de leur action, et qui est d'autant plus court que cette action est plus grande. Par exemple, à l'opérateur caractérisant l'action des forces extérieures $\vec{\gamma} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}}$, on peut associer le temps :

$$\overline{t_E} = \vec{v} / \vec{\gamma} \quad (1)$$

La grandeur $\overline{t_E}$ ci-dessus, représente un temps caractéristique de l'état instantané de la particule. La variation de $\overline{t_E}$ dans l'espace des vitesses est fonction de la non uniformité de l'action de $\vec{\gamma} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}}$: si l'on conserve la définition (1), il existe une infinité de valeurs de $\overline{t_E}$. L'action de l'opérateur ci-dessus est contrebalancée par celle des opérateurs de collision. Si l'on désigne par $\nu(\nu)$ (par analogie avec la définition de la première partie) une fréquence de collisions élastiques, il est alors aisé de définir un temps $\overline{t_{el}}$ égal à $\nu(\nu)^{-1}$ et qui représente la durée d'un libre parcours $[\nu / \nu(\nu)]^{-1}$ de la particule. Comme précédemment, ce temps est fonction de la vitesse (excepté dans le cas particulier $\nu(\nu) = C^{te}$ (gaz maxwellien)). Dans ces conditions, le rapport :

$$\frac{\overline{t_{el}}}{\overline{t_E}} = \frac{\gamma}{\nu \nu}$$

est, en toute rigueur, une fonction de ν .

Le temps $\overline{t_{el}}$ est évidemment associé à l'opérateur du gaz de Lorentz parfait qui a été étudié dans la première partie. Il s'ensuit que l'opérateur du type Chapman et Cowling doit être

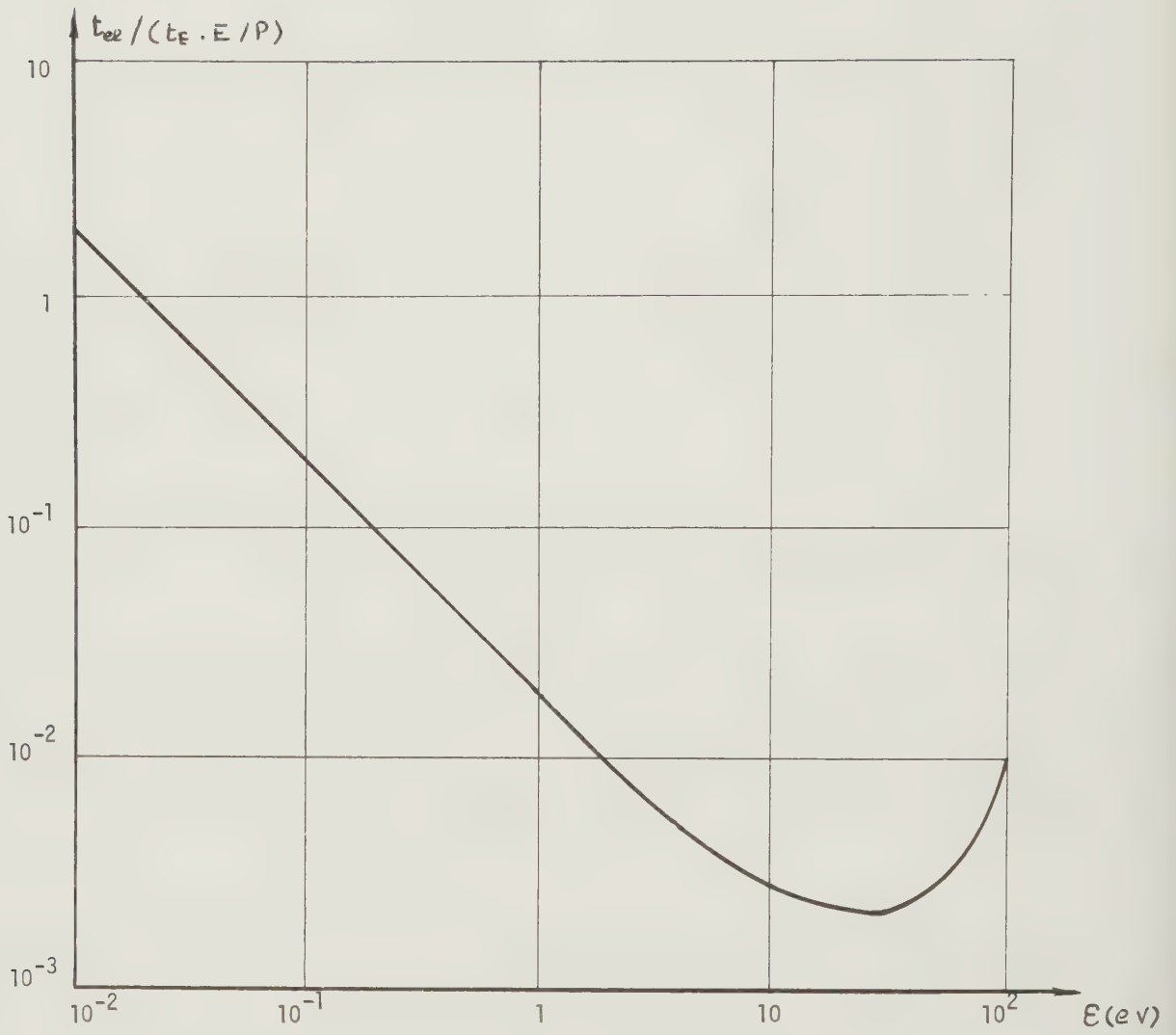


FIGURE 1

affecté d'un temps $\overline{\tau_r} = \overline{\tau_{el}} m/M$ puisque son action est (m/M) fois plus faible que celle de l'opérateur du gaz de Lorentz parfait.

Suivant le cas, on peut être amené également à introduire un ou plusieurs temps caractéristiques relatifs aux collisions inélastiques. On les définit, de la même manière que pour $\overline{\tau_{el}}$, comme l'inverse de la fréquence des collisions inélastiques. On verra plus loin, toutefois, que, dans ce cas, il est nécessaire d'adopter une définition un peu plus fine de manière à rendre compte de l'action décalée, dans l'espace des vitesses, des termes de population et de dépopulation des opérateurs de collision inélastique.

Jusqu'à présent, on a adopté une définition instantanée des temps caractéristiques de façon à prendre en considération leur dépendance avec la vitesse. Le tableau I ci-dessous représente la variation (pour l'hélium et dans le cas des seules collisions élastiques) du rapport $\overline{\tau_{el}} / \overline{\tau_E}$ en fonction de l'énergie cinétique des électrons exprimée en électron-volts et pour une valeur unitaire du rapport champ électrique sur pression. On voit immédiatement (figure 1) que $\overline{\tau_{el}} / \overline{\tau_E}$ cesse toujours d'être un petit paramètre lorsque la vitesse tend vers zéro. Le graphe de $(\overline{\tau_{el}} / \overline{\tau_E}) / (E/p)$ en fonction de E présente une décroissance très rapide au voisinage de zéro, suivie

TABLEAU I

E eV	0	10^{-2}	0,5	1	10	30	50	100
$\overline{\tau_{el}} / \overline{\tau_E}$	∞	1,92	0,039	0,02	$2,863 \cdot 10^{-3}$	$2,125 \cdot 10^{-3}$	$2,84 \cdot 10^{-3}$	0,01
$(E/p)^0$	0	$1,4 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-2}$	0,095	0,128	0,096	0,0272
$\overline{\tau_{el}} / \overline{\tau_E} \sim E^2$	0	$1,2 \cdot 10^{-2}$	0,598	1,17	8,14	10,98	8,21	2,33
$(E/p)^1$	0	$1,2 \cdot 10^{-2}$	0,598	1,17	8,14	10,98	8,21	2,33
$\overline{\tau_{el}} / \overline{\tau_E} \sim E$								

d'un plateau assez large s'étendant jusqu'à une centaine d'électrons-volts. Aux très hautes valeurs de l'énergie, la courbe croît à nouveau. On voit ainsi apparaître, dans le graphe de $\overline{\tau_{el}} / \overline{\tau_E}$ une zone stable où le rapport $\overline{\tau_{el}} / \overline{\tau_E}$ est faible (du moins jusqu'à une certaine valeur de E/p qui reste à préciser) et où l'action des collisions l'emporte sur celle du champ. Aux extrémités du graphe existent deux zones où l'effet inverse se produit, le champ jouant le rôle prépondérant. En toute rigueur, la présence de ces deux zones interdit l'utilisation d'une méthode de perturbation. En fait, ce qui est important, c'est d'étudier le rôle joué par ces deux zones dans la détermination des différentes grandeurs caractéristiques du système étudié. Comme le but final de tout calcul de fonction de distribution réside dans l'évaluation des différentes grandeurs macroscopiques associées pour laquelle intervient toujours le produit $\sqrt{v} f(\vec{v})$, il s'ensuit que les valeurs de $f(\vec{v})$ correspondant à une vitesse voisine de zéro joueront un rôle négligeable dans le calcul de ces grandeurs macroscopiques : on peut donc, dans cette zone, tolérer l'erreur inévitable due à la méthode de perturbation. Le problème est le même pour la zone des hautes énergies dans laquelle, excepté aux hautes valeurs du rapport champ électrique sur pression, la fonction de distribution prend en général des valeurs négligeables.

L'absence d'uniformité dans l'échelle des temps caractéristiques, ainsi que les remarques que nous venons d'effectuer, nous conduisent à remplacer les définitions des temps ci-dessus par des grandeurs moyennes. On a alors :

$$t_{el} = \left[\int v(v) f(\vec{v}) d\vec{v} \right]^{-1} = \langle v \rangle^{-1} \quad (3a)$$

$$t_E = \left[\int v f(\vec{v}) d\vec{v} \right] / \gamma = \langle v \rangle / \gamma \quad (3b)$$

$$t_r = t_{el} \cdot m/M \quad (3c)$$

Les temps t_{el} , t_E et t_r ainsi définis caractérisent en fait l'ordre de grandeur des temps t_{el} , t_E et t_r dans le "plateau" de la courbe de la figure 1 puisque c'est dans cette zone que se situe la partie la plus significative de la fonction de distribution. L'adoption d'une valeur unique de ces temps pour un rapport champ électrique sur pression donné rend plus aisé le classement des différents opérateurs.

Comme je l'ai déjà dit plus haut, la plupart des méthodes de résolution de l'équation de Boltzmann pour un milieu homogène nécessitent l'adoption d'un développement en série des puissances d'un petit paramètre que l'on choisit en général égal à t_{el}/t_E . Dans ce qui suit, il s'avérera plus commode d'adopter comme paramètre du développement $\xi = (m/M)^{1/2}$, la racine carrée du rapport des masses de l'électron et de la molécule. En effet, l'étude des opérateurs de collision effectuée au cours de la première partie met clairement en évidence l'existence de temps, caractéristiques de l'action des collisions, et d'autant plus longs que l'ordre de l'opérateur dans le développement en série des puissances de ξ est plus élevé. L'immuabilité de l'action de ces opérateurs successifs, quelle que soit l'intensité du rapport t_{el}/t_E suggère ainsi un développement de la fonction de distribution en série des puissances de ξ et confère à ce paramètre un rôle privilégié vis à vis de l'action des autres opérateurs. On a en effet toujours $t_{el}/t_r \sim \xi^2$. Une fois défini l'ensemble des temps caractéristiques du système considéré, il suffit de les classer en utilisant ξ comme unité de comparaison.

Par exemple, on peut avoir :

$$t_{el}/t_E \sim \xi^2 \quad (\text{rapport } E/p \text{ extrêmement faible}) \quad (4a)$$

ou $t_{el}/t_E \sim \xi \quad (\text{rapport } E/p \text{ d'intensité moyenne}) \quad (4b)$

Le tableau I indique dans le cas de l'hélium les valeurs des rapports E/p que l'on peut associer à ces échelles de temps.

Suivant le choix effectué pour l'échelle de temps et si l'on porte le développement :

$$f(\vec{v}, t) = \sum_j \xi^j f^j(\vec{v}, t) \quad (5)$$

dans l'équation de Boltzmann initiale, on aboutit à un système infini d'équations pour les $f^j(\vec{v}, t)$ dont nous allons effectuer l'étude au cours des paragraphes suivants.

1.2. PREMIERE ECHELLE DES TEMPS : RAPPORT CHAMP ELECTRIQUE SUR PRESSION TRES FAIBLE.

En l'absence de champ électrique (et plus généralement de forces extérieures) les électrons, pris initialement dans un état quelconque, tendent vers une fonction de distribution d'équilibre qui est la distribution maxwellienne à la température T des molécules. On conçoit que, si le rapport champ électrique sur pression est suffisamment faible, la distribution des électrons est très peu éloignée d'une fonction maxwellienne. Le but de ce qui va suivre est de déterminer les termes correctifs dus à la présence du champ électrique. Pour ce faire, on distinguera deux cas selon que l'on a affaire à un gaz moléculaire (excitation des niveaux de rotation et de vibration) ou non.

1.2.1. Gaz atomique : collisions élastiques pures.

Dans ces conditions, le système infini d'équations décrivant l'évolution des $f^j(\vec{v}, t)$ dans le cas de l'échelle des temps (4a), s'écrit, pour une distribution des molécules maxwellienne :

$$\frac{\partial f^0}{\partial t} = \mathcal{L}_{0,0}^{(0)}(f^0) \quad (5a)$$

$$\xi^2 \frac{\partial f^1}{\partial t} = \xi^2 \mathcal{L}_{0,0}^{(0)}(f^1) + \mathcal{L}_{0,0}^{(1)}(f^0) - \vec{\gamma} \frac{\partial f^0}{\partial \vec{v}} \quad (5b)$$

$$\xi^2 \frac{\partial f^2}{\partial t} = \xi^2 \mathcal{L}_{0,0}^{(0)}(f^2) + \mathcal{L}_{0,0}^{(2)}(f^1) - \vec{\delta} \frac{\partial f^1}{\partial \vec{v}} \quad (5c)$$

où l'on a posé, par analogie avec les définitions de la première partie :

$$\mathcal{L}_{0,0}^{(0)}(g) = -N_0 \vec{v} \cdot \sigma_{0,0}(\vec{v}) g(\vec{v}) + N_0 \int d\Omega \sigma_{0,0}(\vec{v}, \chi) g(\vec{u}) \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{0,0}^{(1)}(g) = N_0 \frac{kT}{2M} \vec{J} : \int \{ & \vec{\nabla}_v \vec{\nabla}_v [\vec{v} \sigma_{0,0}(\vec{v}, \chi) (g(\vec{u}) - g(\vec{v}))] \\ & - 2 \vec{\nabla}_v [\vec{v} \sigma_{0,0}(\vec{v}, \chi) (\vec{\nabla}_u g(\vec{u}) - \vec{\nabla}_v g(\vec{v}))] \\ & + \vec{v} \sigma_{0,0}(\vec{v}, \chi) [\vec{\nabla}_u \vec{\nabla}_u g(\vec{u}) - \vec{\nabla}_v \vec{\nabla}_v g(\vec{v})] \} d\Omega \\ & + N_0 \xi^2 \vec{\nabla}_v \cdot \int d\Omega \vec{v} \sigma_{0,0}(\vec{v}, \chi) (\vec{v} - \vec{u}) f(\vec{u}) \end{aligned} \quad (7b)$$

Outre (4a), on a adopté l'échelle des temps :

$$t_{cl} / t_r \sim \xi^2 \quad (8)$$

(ce qui équivaut d'ailleurs à $t_E \sim t_r$).

Ainsi que le développement :

$$f(\vec{v}, t) = \sum_j \xi^{2j} f^j(\vec{v}, t) \quad (5')$$

Le système (6) montre clairement l'existence de deux phases bien distinctes dans l'évolution du système considéré :

a - une phase courte, de l'ordre de grandeur de τ_{ee} , au cours de laquelle l'action du champ électrique et la perte d'énergie des électrons au cours des collisions peuvent être négligés.

b - une phase longue, non limitée dans le temps, au cours de laquelle, il est nécessaire de prendre en considération l'ensemble des processus.

L'étude du système (6) peut alors s'effectuer en développant les fonctions $f^j(\vec{v}, t)$ en série de polynômes de Legendre : l'absence dans l'équation (6a) du terme rendant compte de l'effet du champ électrique supprime tout couplage entre les différentes anisotropies.

Les conditions initiales pour $t=0$, des fonctions $f^j(\vec{v}, t)$ peuvent être choisies de manière quelconque. Tout au plus, et pour de simples raisons de commodité, nous admettrons que $f(\vec{v}, 0)$ est isotrope. On a donc :

$$f^j(\vec{v}, t)_{t=0} = \varphi^j(v) \quad (9)$$

On posera en outre comme dans la première partie :

$$f^j(\vec{v}, t) = \sum_{\ell} f_{\ell}^j(v, t) P_{\ell}(\cos \theta) \quad (10)$$

Etude de l'équation (6a) :

Si l'on porte (10) dans (6a), il vient :

$$a - \frac{\partial f_0^0}{\partial t} = 0 ; b - \frac{\partial f_{\ell}^0}{\partial t} = - \nu_{\ell}(v) f_{\ell}^0 ; \dots etc \dots \quad E \gg 1 \quad (11)$$

avec

$$\nu_{\ell}(v) = N_0 v \int \sigma_{\ell 0}(v, \chi) [1 - P_{\ell}(\cos \chi)] d\Omega$$

Alors compte tenu de (9) :

$$f_0^0(v, t) = \phi^0(v) = f_0^0(v, \infty) \quad (12a)$$

$$f_{\ell}^0(v, t) = 0 \quad (12b)$$

Le résultat (12), classique, traduit le comportement de la fonction de distribution dans un gaz de Lorentz en l'absence de champ (ou sur un temps tel que l'influence des forces extérieures soit négligeable). On note l'existence d'une solution $\phi^0(v)$ permanente dont on va préciser le comportement ci-dessous.

Etude de l'équation (6b) :

De la même manière que précédemment, on obtient :

$$\xi^2 \frac{\partial f_0^1}{\partial t} = \mathcal{L}_{0,0;0}^{(2)}(\varphi^0) \quad (13a)$$

$$\xi^2 \frac{\partial f_1^1}{\partial t} = - \xi^2 \nu_1(v) f_1^1 - \gamma \frac{\partial \varphi^0}{\partial v} \quad (13b)$$

----- etc -----

avec

$$\mathcal{L}_{0,0,0}^{(2)}(\varphi^0) = \xi^2 \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[v_1(v) v^3 \left(\varphi^0 + \frac{kT}{mv} \frac{\partial \varphi^0}{\partial v} \right) \right]$$

opérateur classique de Chapman et Cowling. L'intégration de (13a) nous conduit à l'expression :

$$f_0^1(v, t) = \xi^{-2} \mathcal{L}_{0,0,0}^{(2)}(\varphi^0) \cdot t + \varphi^1(v) \quad (14)$$

dans laquelle on constate la présence d'un terme permanent $\varphi^1(v)$ et d'un terme séculaire qui croît indéfiniment avec le temps t . Il en résulte que sans hypothèses supplémentaires l'équation (14) ne comporte pas de solution permanente stationnaire. Dans ces conditions, l'existence d'une solution stationnaire ne peut être garantie que si l'on adopte la condition :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\xi^{-2} \mathcal{L}_{0,0,0}^{(2)}(\varphi^0)) = 0 \quad (15)$$

c'est-à-dire si $\varphi^0(v)$ est maxwellienne à la température T des molécules. Par suite :

$$\boxed{f_0^1(v, t) = \varphi^1(v) = f_0^1(v, \infty)} \quad (16)$$

La relation (15) est équivalente aux conditions imposées dans la méthode des échelles de temps multiples pour éliminer les termes séculaires et procède du même esprit. La solution de (13b) s'obtient aisément et, compte tenu des conditions initiales (9) :

$$\boxed{f_1^1(v, t) = f_1^1(v, \infty) [1 - \exp(-v_1 t)]} \quad (17)$$

où $f_1^1(v, \infty)$ est la solution permanente définie par :

$$f_1^1(v, \infty) = -\frac{1}{\xi^2} \frac{\gamma}{v_1} \frac{\partial \varphi^0}{\partial v} \quad (17a)$$

Il est aisé de voir également que les anisotropies d'ordre supérieur $f_\ell^1(v, t)$, ($\ell \geq 2$) sont nulles par suite des conditions initiales choisies et que, de toute manière, pour des conditions initiales quelconques, elles conduisent à une solution permanente toujours nulle.

Etude de l'équation (6c) :

On obtient pour les anisotropies successives les équations :

$$\frac{\partial f_0^2}{\partial t} = \xi^{-2} \left[\mathcal{L}_{0,0,0}^{(2)}(\varphi^1) - \frac{\gamma}{3v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 f_1^1) \right] \quad (18a)$$

$$\frac{\partial f_1^2}{\partial t} = -v_1 f_1^2 - \xi^{-2} \gamma \frac{\partial \varphi^1}{\partial v} \quad (18b)$$

----- etc. -----

Dans l'équation (18b) on a admis implicitement que la partie anisotrope de l'opérateur $\mathcal{L}_{0,0,0}^{(1)}(f_1)/\xi^2$ est négligeable devant son homologue de $\mathcal{L}_{0,0,0}^{(0)}(f_2)$. Comme pour l'équation (6b) on peut se rendre

compte de l'absence de solutions permanentes pour (18a), à moins que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi^{-2} \left\{ \mathcal{L}_{0,0,0}^{(2)}(\varphi^1) - \frac{\gamma}{3v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[v^2 f_1^1(v, \infty) \right] \right\} = 0 \quad (19)$$

La relation (19) ci-dessus permet de déterminer $\varphi^1(v)$, soit, si l'on admet pour condition initiale $\varphi^1(0) = 0$:

$$\varphi^1(v) = \frac{1}{\xi^2} \frac{M}{3m} \left(\frac{m\gamma}{kT} \right)^2 \varphi^0(v) \int_0^v \frac{w}{v_1^2(w)} dw \quad (20)$$

Compte tenu de (15) et de (20), il s'ensuit que la partie isotrope de la fonction de distribution est donnée, limitée aux deux premiers termes de (5') par :

$$\varphi(v) = \varphi^0(v) \left[1 + \frac{M}{3m} \left(\frac{m\gamma}{kT} \right)^2 \int_0^v \frac{w}{v_1^2(v)} dw \right] \quad (21)$$

La prise en considération de termes d'ordre supérieur dans (5') conduirait à l'apparition dans (21) de termes de l'ordre de grandeur de $\left(\frac{m\gamma}{kT} \right)^{2j}$, $j \geq 2$: étant donné l'échelle des temps adoptée, il ne ne paraît pas nécessaire d'effectuer ce calcul. Pour une étude plus approfondie de ce problème le lecteur intéressé peut se reporter à l'excellent travail de BAYET (Ba-1).

Le terme correctif de (21) apporte une justification précise au choix du rapport $\gamma / (\langle v \rangle \langle v \rangle)$ comme petit paramètre. Le carré de ce rapport intervient presque intégralement dans (21). En effet, on peut remarquer que $\langle v \rangle^2 = 3kT/m$ et que $\langle v \rangle^{-1}$ est homogène à :

$$\left[m / 3kT \right] \cdot \int_0^v \frac{w}{v_1^2(w)} dw$$

De la même manière que pour (13b), l'équation (18b) conduit à la solution :

$$f_1^2(v, t) = f_1^2(v, \infty) \left[1 - \exp(-v_1 t) \right] \quad (22)$$

avec

$$f_1^2(v, \infty) = - \frac{1}{\xi^2} \frac{\gamma}{v_1} \frac{\partial \varphi^1}{\partial v} \quad (22a)$$

On obtiendrait des expressions identiques pour les $f_1^j(v, t)$, $j \geq 2$.

En conclusion de ce paragraphe, on peut dire que la méthode de perturbation adoptée, si elle n'est pas apte à traiter le problème de la relaxation vers l'équilibre d'un gaz d'électrons, permet d'établir les conditions nécessaires et suffisantes de l'existence d'un tel état. On conservera donc cette manière de procéder dans tout ce qui suit.

1.2.2. Gaz moléculaire : collisions élastiques et inélastiques (excitation des niveaux de rotation et de vibration).

Aux temps t_{el} , t_E et t_r , il convient d'associer ici les temps t_R (temps de rotation) et t_v (temps de vibration) définis respectivement comme les inverses des fréquences moyennes de collision relatives à la rotation ($\langle v_R \rangle^{-1}$) et à la vibration ($\langle v_v \rangle^{-1}$). On ne considèrera ici qu'un seul niveau pour chaque processus mais il est bien évident que les calculs qui vont être

effectués peuvent être généralisés à un nombre quelconque de niveaux selon la nature du problème considéré.

Les données existantes dans la littérature relatives aux sections efficaces des processus de rotation et de vibration (La-3) montrent qu'en général leur intensité est nettement plus faible que celle des sections efficaces de collision élastique correspondantes. Dans ce qui suit on adoptera pour échelle des temps :

$$\frac{t_{el}}{t_R} \sim \frac{t_{el}}{t_V} \sim \xi^4 \quad (23)$$

ce qui correspond sensiblement au cas de l'hydrogène moléculaire. Alors, et si l'on désigne pour simplifier par $\mathcal{L}_R$ et $\mathcal{L}_V$ respectivement les opérateurs de rotation et de vibration, on obtient compte tenu de (8) et (23) le système :

$$\frac{\partial f^0}{\partial t} = \mathcal{L}_{0,0}^{(0)}(f^0) \quad (24a)$$

$$\xi^2 \frac{\partial f^1}{\partial t} = \xi^2 \mathcal{L}_{0,0}^{(0)}(f^1) + \mathcal{L}_{0,0}^{(1)}(f^0) - \vec{\gamma} \cdot \frac{\partial f^0}{\partial \vec{v}} \quad (24b)$$

$$\begin{aligned} \xi^4 \frac{\partial f^2}{\partial t} = & \xi^4 \mathcal{L}_{0,0}^{(0)}(f^2) + \xi^2 \mathcal{L}_{0,0}^{(1)}(f^1) + \mathcal{L}_R^{(0)}(f^0) + \mathcal{L}_V^{(0)}(f^0) \\ & + \mathcal{L}_R^{(2)}(f^0) + \mathcal{L}_V^{(2)}(f^0) \end{aligned} \quad (24c)$$

----- etc... -----

Je ne préciserai pas ici l'écriture générale des opérateurs $\mathcal{L}_R^{(0)}, \mathcal{L}_V^{(0)}, \mathcal{L}_R^{(2)}, \mathcal{L}_V^{(2)}$ (on peut pour cela se reporter à la première partie, en particulier aux formules (47)) : il sera suffisant, pour ce qui suit d'en connaître la partie isotrope. On remarquera que dans (24c) on fait jouer un rôle comparable aux opérateurs d'ordre zéro et deux ($\mathcal{L}_R^{(0)}$ et $\mathcal{L}_R^{(2)}$ par exemple). Cela est la conséquence de la très faible valeur des seuils de rotations ou de vibration (le cas limite étant constitué évidemment par les collisions élastiques).

Les équations (24a) et (24b) identiques à (6a) et (6b) conduisent donc aux mêmes résultats à savoir une distribution $\varphi^0(v)$ maxwellienne à la température T des molécules associée aux relations (16) et (17). L'équation (24c) est différente de (6c) et, par suite, la relation (19) doit être remplacée par :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi^{-2} \left\{ \xi^2 \mathcal{L}_{0,0}^{(2)}(\varphi^0) - \xi^2 \frac{\gamma}{3v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[v^2 f_1(v, \infty) \right] + \sum_S \mathcal{L}_{S,0}^{(0)}(\varphi^0) + \sum_S \mathcal{L}_{S,0}^{(2)}(\varphi^0) \right\} = 0 \quad (25)$$

on a posé :

$$\mathcal{L}_{S,0}^{(0)} = \mathcal{O}_{S,0}(v) \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{S,0}^{(2)} = & \frac{kT}{M} \left\{ \frac{1}{2v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[v^2 \frac{\partial}{\partial v} \mathcal{O}_{S,0}(v) \right] + \frac{1}{2v^2} \mathcal{O}_{S,1}(v) \right. \\ & \left. - \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[v^2 \mathcal{O}_{S,2}(v) \right] + \frac{1}{2v^2} \mathcal{O}_{S,3}(v) \right\} \\ & + \frac{m}{M} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[v_s v^2 \alpha_{S,0}(v) \varphi^0(v_s) \right] \end{aligned} \quad (27)$$

et

$$O_{s,0}(v) = u_s v^{-1} \mathcal{A}_{s,0}(u_s) \varphi^0(u_s) - \mathcal{A}_{s,0}(v) \varphi^0(v) \quad (27a)$$

$$O_{s,1}(v) = u_s v \mathcal{A}_{s,0}(u_s) \frac{\partial^2}{\partial u_s^2} \varphi^0(u_s) - v^2 \mathcal{A}_{s,0}(v) \frac{\partial^2}{\partial v^2} \varphi^0(v) \quad (27b)$$

$$O_{s,2}(v) = u_s v^{-1} \mathcal{A}_{s,1}(u_s) \frac{\partial}{\partial u_s} \varphi^0(u_s) - \mathcal{A}_{s,0}(v) \frac{\partial}{\partial v} \varphi^0(v) \quad (27c)$$

$$O_{s,3}(v) = v \left[\mathcal{A}_{s,0}(u_s) \frac{\partial}{\partial u_s} \varphi^0(u_s) - \mathcal{A}_{s,0}(v) \frac{\partial}{\partial v} \varphi^0(v) \right] \quad (27d)$$

$$a_{s,0}(v) = \mathcal{A}_{s,0}(u_s) - u_s v^{-1} \mathcal{A}_{s,1}(u_s) \quad (27e)$$

$$u_s^2 = v^2 + \frac{2}{m} \mathcal{E}_s \quad ; \quad \mathcal{E}_s = \frac{1}{2} m v_s^2 \quad ; \quad s = R, V$$

si l'on tient compte de la nature maxwellienne de $\varphi^0(v)$, les relations (27) prennent la forme :

$$O_{s,0}(v) = \left[u_s v^{-1} \mathcal{A}_{s,0}(u_s) \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_s}{kT}\right) - \mathcal{A}_{s,0}(v) \right] \cdot \varphi^0(v) \quad (28a)$$

$$O_{s,1}(v) = \left\{ u_s v \mathcal{A}_{s,0}(u_s) \left[\left(\frac{u}{v}\right)^2 \left[\frac{m}{kT} + \left(\frac{mv}{kT}\right)^2\right] - \frac{u}{v} \frac{d}{dv} \left(\frac{u}{v}\right) \frac{mv}{kT} \right] \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_s}{kT}\right) - v^2 \mathcal{A}_{s,0}(v) \left[\frac{m}{kT} + \left(\frac{mv}{kT}\right)^2\right] \right\} \cdot \varphi^0(v) \quad (28b)$$

$$O_{s,2}(v) = -\frac{mv}{kT} \left[\left(\frac{u_s}{v}\right)^2 \mathcal{A}_{s,1}(u_s) \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_s}{kT}\right) - \mathcal{A}_{s,0}(v) \right] \cdot \varphi^0(v) \quad (28c)$$

$$O_{s,3}(v) = -\frac{mv^2}{kT} \left[u_s v^{-1} \mathcal{A}_{s,0}(u_s) \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_s}{kT}\right) - \mathcal{A}_{s,0}(v) \right] \cdot \varphi^0(v) \quad (28d)$$

Posons maintenant pour simplifier la relation (25) :

$$\sum_s \mathcal{L}_{s,0}^{(0)}(\varphi^0) + \sum_s \mathcal{L}_{s,0}^{(2)}(\varphi^0) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} L_{s,0}(\varphi^0)$$

La solution du système (25), homologue de (21) est alors :

$$\boxed{\varphi(v) = \varphi^0(v) \left\{ 1 + \frac{M}{3m} \left(\frac{m}{kT}\right)^2 \int_0^v y v_1^{-2}(y) dy + \frac{1}{a} \frac{m}{kT} \int_0^v \frac{1}{v_1 y^2} \exp\left(\frac{m y^2}{2kT}\right) L_{s,0}[\varphi^0(v)] dy + \dots \right\}} \quad (29)$$

où a représente la constante de normalisation de la distribution de Maxwell.

La relation (29) généralise ainsi le résultat obtenu en (21) dans le cas d'un gaz atomique. L'importance des termes correctifs dans (29) dus à la présence des processus de rotation et de vibration est un problème délicat qui relève en toute rigueur de l'étude numérique de (29). On ne l'effectuera pas ici et on se contentera de remarquer pour l'instant que l'une des situations où l'influence des rotations et des vibrations prédomine est celle d'un champ électrique voisin de zéro : on peut constater d'ailleurs que l'on n'obtient plus une distribution maxwellienne des électrons lorsque le champ électrique est nul.

L'étude qui vient d'être effectuée nous a permis d'obtenir la composante permanente de la partie isotrope de la fonction de distribution des vitesses des électrons dans le cas où l'influence du champ électrique est très faible vis à vis des collisions. Au cours du paragraphe suivant, on va considérer une situation où soit le champ électrique étant plus élevé, soit la pression du gaz étant plus faible, les résultats obtenus ci-dessus ne sont plus valables. On étudiera en particulier les liaisons existantes entre ces deux états.

1.3. DEUXIEME ECHELLE DES TEMPS - RAPPORT CHAMP ELECTRIQUE SUR PRESSION DE MOYENNE INTENSITE.

On se trouve ici dans le cas de l'échelle des temps définie par (4b). Mais, à l'opposé du paragraphe précédent, et pour les plus hautes valeurs du rapport E/p , il est nécessaire de prendre en considération l'influence des collisions inélastiques (excitation et ionisation des niveaux optiques). Considérons en premier lieu le cas des seules collisions élastiques.

1.3.1. Collisions élastiques pures.

$$\frac{\partial f^0}{\partial t} = \mathcal{L}_{0,0}^{(0)}(f^0) \quad (30a)$$

$$\xi \frac{\partial f^1}{\partial t} = \xi \mathcal{L}_{0,0}^{(0)}(f^1) - \vec{\gamma} \cdot \frac{\partial f^0}{\partial \vec{v}} \quad (30b)$$

$$\xi^2 \frac{\partial f^2}{\partial t} = \xi^2 \mathcal{L}_{0,0}^{(0)}(f^2) - \xi \vec{\gamma} \cdot \frac{\partial f^1}{\partial \vec{v}} - \mathcal{L}_{0,0}^{(2)}(f^0) \quad (30c)$$

----- etc... -----

On a :

$$f(\vec{v}, t) = \sum_j \xi^j f^j(\vec{v}, t) \quad (31)$$

Les opérateurs de collision $\mathcal{L}_{0,0}^{(0)}$ et $\mathcal{L}_{0,0}^{(1)}$ ont été donnés en (7a) et (7b) respectivement.

L'équation (30a) ci-dessus conduit aux relations (12) ; l'équation (30b) aux relations (16) et (17) (mais avec maintenant $f_1^1(v, \infty) = -\frac{1}{\xi} \frac{\vec{\gamma}}{v} \cdot \frac{\partial f^0}{\partial \vec{v}}$), l'existence d'un état stationnaire étant toujours garantie. Pour que (30c) possède une solution permanente, on est amené à imposer une condition du type (19), telle que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi^{-2} \left\{ \mathcal{L}_{0,0;0}^{(2)}(f^0) - \xi \frac{\vec{\gamma}}{3v^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \left[v^2 f_1^1(v, \infty) \right] \right\} = 0 \quad (32)$$

et qui admet comme solution la distribution classique de MARGENAU-DAVYDOV :

$$\varphi^0(v) = A \exp \left[- \int_0^v \frac{w \, dw}{\frac{\kappa T}{m} + \frac{\gamma^2}{3 v_1^2} \cdot \frac{M}{m}} \right] \quad (33)$$

où A représente la constante de normalisation.

Si l'expression $\frac{\gamma^2}{3 v_1^2} \frac{M}{\kappa T}$ est négligeable devant un, un développement de Taylor de (33) limité aux deux premiers termes nous permet de retrouver l'expression (21). Ce résultat, qui peut paraître paradoxal à première vue, est dû au fait que le système (6) constitue un sous-système de (30).

Si l'on conserve les conditions initiales (9) du paragraphe précédent et si l'on s'intéresse aux équations d'ordre supérieur du système (30), il est facile de voir que les fonctions $\varphi^1(v)$, $\varphi^2(v)$, etc... sont toutes égales à $\varphi^0(v)$. Ainsi, la partie isotrope de la fonction de distribution obéit-elle à la relation générale :

$$\varphi(v) = \frac{A}{1 - \xi} \varphi^0(v) \quad (34)$$

du moins tant que la deuxième échelle des temps est respectée (ce qui, on le sait, n'est pas réalisé uniformément dans tout l'espace des vitesses).

I.3.2. Collisions élastiques et collisions inélastiques.

La présence des collisions inélastiques rend le problème beaucoup plus délicat à traiter, d'abord dans l'établissement des équations, ensuite dans leur résolution qui, comme on l'a déjà dit, n'est en général par réalisable de manière analytique.

On sait que, les termes de population et de dépopulation des opérateurs de collision inélastique n'agissent pas avec la même intensité dans l'espace des vitesses. De manière à pouvoir rendre compte de cette particularité, il me paraît nécessaire de définir, selon la zone concernée de l'espace des vitesses, différents temps, caractéristiques de l'action de ces termes de population et de dépopulation. On posera :

$$a. \tau_{in}^{D+} = \left[\int_{v_1}^{\infty} v_{in}(v) f(\vec{v}) \, dv \right]^{-1} \quad b. \tau_{in}^{P+} = \left[\int_{\sqrt{2} v_1}^{\infty} v_{in}(v) f(\vec{v}) \, dv \right]^{-1} \quad (35)$$

Les temps τ_{in}^{D+} et τ_{in}^{P+} caractérisent respectivement l'action des opérateurs de dépopulation et de population dans l'intervalle $v \gg v_1$ ($m v_1^2/2$, premier seuil d'excitation). Au-dessous du premier seuil d'excitation on peut définir deux nouveaux temps τ_{in}^{D-} et τ_{in}^{P-} relatifs également aux termes de dépopulation et de population et tels que :

$$a. \tau_{in}^{D-} = \infty \quad ; \quad d. \tau_{in}^{P-} = \tau_{in}^{D+} \quad (35)$$

Dés lors, il est clair que, par suite de l'existence de deux échelles de temps distinctes, on va être conduit, selon que l'on se trouve en dessus ou en dessous du premier seuil d'excitation, à deux systèmes différents d'équations qu'il conviendra de traiter séparément.

Le classement précis des temps définis par les relations (35) suppose en toute rigueur la connaissance de la fonction de distribution. Toutefois, par suite du caractère rapidement décroissant de la fonction de distribution au-dessus du premier seuil d'excitation, un certain nombre de remarques peuvent être faites a priori. En premier lieu, il est facile de voir que :

$$t_{in}^{P+} > t_{in}^{D+} \quad (36a)$$

ce qui traduit le fait que, pour $v \gg v_1$, les "pertes" par collisions inélastiques sont toujours supérieures aux "gains". Compte tenu des relations (35c) et (35d), on a également :

$$t_{in}^{P-} < t_{in}^{D-} = \infty \quad (36b)$$

Le problème se pose maintenant de définir les ordres de grandeur respectifs des temps ci-dessus. Si l'on compare les intensités des sections efficaces de collision élastique et inélastique dans la zone $v \gg v_1$, on voit que, très rapidement, elles acquièrent des valeurs comparables (cf. 5^e partie). On pourrait être tenté alors, dans cette zone de poser :

$$t_{el} \sim t_{in}^{D+} \quad (37a)$$

Si l'on introduit alors les opérateurs de collision inélastique dans le système (30), on constate que l'échelle des temps (37) interdit l'existence d'une solution stationnaire non nulle pour $v \gg v_1$: la présence d'une telle solution dans le cas de l'échelle des temps (37) ne peut être garantie que si l'on abandonne l'échelle (4b), et, par suite, la méthode de perturbation actuelle. On peut également remarquer que si, dans le cadre de l'échelle (4b), on admet que :

$$t_{in}^{D+} \sim t_E \iff t_{el} / t_{in}^{D+} \sim \xi \quad (37b)$$

c'est-à-dire si l'on considère que le champ et les collisions inélastiques jouent des rôles comparables (pour $v \gg v_1$), il est facile de voir que la partie isotrope de $f(\vec{v})$ croît indéfiniment, quel que soit $\vec{v}$, à moins que la fréquence des collisions inélastiques soit nulle : cela exclut l'échelle des temps (37b). On est ainsi amené à la conclusion que la seule estimation permise pour t_{in}^{D+} , cohérente avec (4b), est donnée par la relation :

$$t_{el} / t_{in}^{D+} \sim \xi^2 \quad (38)$$

On en déduit immédiatement :

$$t_{el} / t_{in}^{P+} < \xi^2 \quad (39)$$

La détermination précise de l'échelle (39) exige que l'on caractérise d'avantage la situation physique étudiée. Ainsi, dans le cas où le gaz neutre est un gaz rare pour lequel les transitions énergétiques sont élevées on peut, toujours grâce à (4b), écrire :

$$\boxed{t_{el} / t_{in}^{P+} \sim \xi^3} \quad (40)$$

Par la suite, je limiterai strictement les calculs à cette situation.

Enfin, compte tenu de (35d), et de (38), on a la relation :

$$\boxed{t_{el} / t_{in}^p \sim \xi^2} \quad (41)$$

L'ensemble des relations (4b), (38), (40) et (41) nous permet maintenant d'obtenir les deux systèmes d'équations vérifiés par la "queue" et le "corps" de la fonction de distribution.

Equations vérifiées par la "queue" de la fonction de distribution :

Les relations (4b), (38) et (40) nous conduisent immédiatement au système :

$$\frac{\partial f^0}{\partial t} = \mathcal{L}_{0,0}^{(0)}(f^0) \quad (42a)$$

$$\xi \frac{\partial f^1}{\partial t} = \xi \mathcal{L}_{0,0}^{(0)}(f^1) - \vec{\sigma} \cdot \frac{\partial f^0}{\partial \vec{v}} \quad (42b)$$

$$\xi^2 \frac{\partial f^2}{\partial t} = \xi^2 \mathcal{L}_{0,0}^{(0)}(f^2) - \xi \vec{\sigma} \cdot \frac{\partial f^1}{\partial \vec{v}} - \mathcal{L}_{0,0}^{(2)}(f^0) - \sum_j \mathcal{L}_{0,j}^{0(0)}(f^0) \quad (42c)$$

$$\xi^3 \frac{\partial f^3}{\partial t} = \xi^3 \mathcal{L}_{0,0}^{(0)}(f^3) - \xi^2 \vec{\sigma} \cdot \frac{\partial f^2}{\partial \vec{v}} - \xi \mathcal{L}_{0,0}^{(2)}(f^1) - \xi \sum_j \mathcal{L}_{0,j}^{0(0)}(f^1) + \sum_j \mathcal{L}_{0,j}^{p(0)}(f^0) \quad (42d)$$

etc

Dans les relations ci-dessus, on n'a pas tenu compte, pour des raisons de simplicité, de l'opérateur d'ionisation. Les notations sont en général celles de la première partie mais, en outre, on a posé :

$$\mathcal{L}_{0,j}^{(0)}(g) = \mathcal{L}_{0,j}^{p(0)}(g) - \mathcal{L}_{0,j}^{D(0)}(g)$$

où $\mathcal{L}_{0,j}^{p(0)}$ et $\mathcal{L}_{0,j}^{D(0)}$ correspondent respectivement aux termes de population et de dépopulation. La décomposition en série de polynômes de Legendre de ces deux opérateurs conduit aux relations :

$$\mathcal{L}_{0,j;n}^{D(0)}(g_n) = -v_{in,n}(v) g_n(v) \quad \text{avec} \quad v_{in,n}(v) = v \sum_j \sigma_{0,j;0}(v)$$

$$\mathcal{L}_{0,j;n}^{p(0)}(g_n) = \sum_j u_{0,j} v^{-1} \mathcal{L}_{0,j;n}(u_{0,j}) g_n(u_{0,j}) \quad \text{avec} \quad u_{0,j}^2 = v^2 + v_{0,j}^2$$

qui ont été déjà obtenues et étudiées au cours de la première partie. Les équations (42a) et (42b) qui ont été déjà rencontrées précédemment, conduisent donc aux relations (12), (16) et (17) (avec la modification, $f_1^1(v, \infty) = -\frac{1}{\xi} \frac{\vec{\sigma}}{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \varphi^0$). L'équation (42c) permet d'obtenir la solution permanente :

$$f_0^2(v, t) = \varphi^2(v) = f_0^2(v, \infty)$$

associée à la condition :

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} \xi^{-2} \left\{ \mathcal{L}_{0,0}^{(2)}(\varphi^0) - \frac{\vec{\sigma}}{3v^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \left[v^2 f_1^1(v, \infty) \right] - v_{in}(v) \varphi^0 \right\} = 0} \quad (43)$$

De même l'équation (42d) entraîne :

$$f_0^3(v, t) = \varphi^3(v) = f_0^3(v, \infty) \quad (44)$$

et :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi^{-2} \left\{ \mathcal{L}_{0,0}^{(2)}(\varphi^1) - \xi \frac{\gamma}{3v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[v^2 f_1^2(v, \infty) \right] - v_{in,0}(v) \varphi^1 + \xi^{-1} \sum_j \mathcal{L}_{0,j;0}^{P(0)}(\varphi^0) \right\} = 0 \quad (45)$$

avec évidemment :

$$f_1^2(v, \infty) = - \frac{1}{\xi} \frac{\gamma}{v_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \quad (45a)$$

L'équation (43) est une équation différentielle homogène du second ordre à coefficients variables dont la solution analytique exacte n'est en général pas connue, excepté pour certaines formes très particulières de $v_1(v)$ et de $v_{in,0}(v)$. L'équation (45) se déduit de la précédente par l'adjonction du terme de population connu $\sum_j \mathcal{L}_{0,j;0}^{P(0)}(\varphi^0)$: c'est une équation différentielle du second ordre inhomogène à coefficients variables dont la solution est liée directement à celle de (43). On peut poursuivre la méthode de perturbation et chercher les équations vérifiant φ^2 , φ^3 , etc... On voit rapidement qu'elles sont toutes identiques à (45), le terme inhomogène dépendant successivement de φ^1 , φ^2 , etc...

L'étude que l'on vient d'effectuer montre clairement que la détermination de la partie isotrope de la "queue" de la fonction de distribution en présence des collisions inélastiques repose essentiellement sur la résolution de l'équation différentielle du second ordre (43) qui donne le terme prépondérant de la partie isotrope. Les termes d'ordre supérieur dans le développement obéissent à des équations du type (45) et se déterminent exactement une fois que la solution de (43) est connue. On reviendra plus loin sur le problème important de la résolution de (43) dont on donnera en particulier des solutions analytiques approchées en terme de développements asymptotiques.

Equations vérifiées par le "corps" de la fonction de distribution ($v \leq v_1$) :

Dans cette zone, on aboutit, compte tenu de (4b) et (41) à un système très voisin de (42). Les deux premières équations sont identiques. Les deux équations suivantes sont :

$$\xi^2 \frac{\partial f^2}{\partial t} = \xi^2 \mathcal{L}_{0,0}^{(0)}(f^2) - \xi \vec{\gamma} \cdot \frac{\partial f^1}{\partial \vec{v}} - \mathcal{L}_{0,0}^{(2)}(f^0) - \sum_j \mathcal{L}_{0,j}^{P(0)} \left[f^0(\vec{v}_{i,j}) \right] \quad (46c)$$

$$\xi^3 \frac{\partial f^3}{\partial t} = \xi^3 \mathcal{L}_{0,0}^{(0)}(f^3) - \xi^2 \vec{\gamma} \cdot \frac{\partial f^2}{\partial \vec{v}} - \xi \mathcal{L}_{0,0}^{(2)}(f^1) - \sum_j \mathcal{L}_{0,j}^{P(0)} \left[f^1(\vec{v}_{i,j}) \right] \quad (46d)$$

Elles conduisent immédiatement aux relations :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi^{-2} \left\{ \mathcal{L}_{0,0}^{(2)}(\varphi^0) - \frac{\gamma}{3v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[v^2 f_1^1(v, \infty) \right] - \sum_j \mathcal{L}_{0,j;0}^{P(0)} \left[\varphi^0(v_{i,j}) \right] \right\} = 0 \quad (47)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi^{-2} \left\{ \mathcal{L}_{0,0;0}^{(2)}(\varphi') - \xi \frac{\mathcal{F}}{3v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[v^2 f_1^2(v, \infty) \right] - \xi^{-1} \sum_j \mathcal{L}_{0,j;0}^{P(0)} \left[\varphi'(v_{0,j}) \right] \right\} = 0 \quad (4)$$

qui sont deux équations différentielles non homogènes du premier ordre dont l'intégration, une fois connu le terme non homogène, est immédiate. Le problème du calcul de la partie isotrope de la fonction de distribution sur l'espace entier des vitesses repose donc exclusivement sur la connaissance de la solution des équations (43), (45), et éventuellement des équations d'ordre supérieur dans le développement.

Comme on l'a déjà dit, la méthode de perturbation que j'ai adoptée jusqu'à maintenant ne peut plus être utilisée si l'échelle des temps (4b) n'est plus vérifiée, c'est-à-dire si :

$$t_{el} \leq t_E \quad (49)$$

En effet, dans ce cas, l'action du champ électrique est égale ou supérieure à celle des collisions et les anisotropies successives de la fonction de distribution ne décroissent plus suffisamment vite de manière à ce qu'un découplage puisse être facilement réalisé. Lorsque l'on restreint (49) à l'inégalité stricte $t_{el} < t_E$, il est fort probable qu'un état homogène ne puisse être réalisé puisque l'équilibre énergétique résultant d'une action comparable du champ électrique et des collisions ne semble pas pouvoir se réaliser par suite de l'échauffement excessif du gaz d'électrons. Il est donc logique de penser que cette situation ($t_{el} \ll t_E$) soit surtout caractéristique d'un milieu hétérogène dont on effectuera d'ailleurs l'étude au cours de la troisième partie de ce travail. Dans ce qui suit, je vais proposer une méthode de résolution de l'équation de Boltzmann limitée au cas où champ électrique et collisions jouent des rôles comparables, c'est-à-dire lorsque $t_{el} \sim t_E$.

CHAPITRE II

RESOLUTION DE L'EQUATION DE BOLTZMANN LORSQUE L'ACTION DU CHAMP ELECTRIQUE EST COMPARABLE A CELLE DES COLLISIONS

XXXXX

II.1. DEFINITION DE LA METHODE.

L'ensemble des résultats que j'ai obtenus au cours des paragraphes précédents montre que, en l'absence de collisions inélastiques, la partie isotrope de la fonction de distribution n'est pas très éloignée d'une distribution maxwellienne. Dans le cadre de la première échelle des temps, la partie isotrope est quasiment maxwellienne à la température T des molécules. La deuxième échelle des temps conduit à la distribution de MARGENAU-DAVYDOV qui est rigoureusement maxwellienne dans le cas d'une fréquence des collisions constante à une température $T' = T_e + T$, somme des températures moléculaires et électroniques. Lorsque la fréquence des collisions est une fonctionnelle de la vitesse, la distribution de MARGENAU conserve un caractère exponentiellement décroissant et on peut raisonnablement espérer pouvoir approcher de très près cette distribution en "ajustant" la température d'une distribution maxwellienne. Le même problème se retrouve dans le cas de collisions inélastiques où le caractère exponentiellement décroissant existe toujours (du moins en première approximation) comme on le montrera dans la suite de cet exposé.

Ainsi, il semble qu'une distribution maxwellienne à une température T' , somme des températures moléculaires et électroniques, constitue une représentation assez proche de la distribution réelle. Dans ces conditions, il est naturel de considérer cette distribution maxwellienne comme la fonction poids d'un développement en série de polynômes orthogonaux dont la convergence sera d'autant plus rapide que la fonction poids maxwellienne représentera d'autant mieux la distribution réelle. Cette méthode est connue dans la littérature sous le nom de méthode de GRAD (Gr-1). Elle a été généralisée par MINTZER (Mi-1) au cas d'une fonction poids quelconque. Si la fonction poids est maxwellienne les polynômes orthogonaux sont les polynômes tensoriels d'Hermite. Par suite des propriétés rotationnelles des termes de collision, il n'est pas facile en général de mettre en oeuvre les

polynômes d'Hermite qui sont définis dans un repère cartésien. On peut exprimer les tenseurs cartésien irréductibles de GRAD au moyen des tenseurs sphériques du même type en faisant intervenir les harmoniques sphériques. Dans ces conditions, les polynômes d'Hermite sont remplacés par les polynômes de Laguerre (ou de Sonine), d'ordre correspondant au degré de l'anisotropie considérée.

Alors, les anisotropies successives de la fonction de distribution obéissent à la relation (Ku-1) :

$$f_{\ell}(v) = v^{\ell} f^{*}(v) \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{\ell} L_k^{\ell+1/2}(v^2) \quad (50)$$

où $L_k^{\ell+1/2}(v^2)$ est le polynôme de Laguerre d'ordre $\ell+1/2$. On a :

$$f^{*}(v) = (m/2\pi kT')^{3/2} \exp(-v^2) \quad (51a)$$

$$v^2 = (m/2\pi kT') v^2 = v^2/\alpha \quad (51b)$$

$$T' = T + T_e \quad (51c)$$

$$f_{\ell}(v) = \frac{1}{4\pi} \int f(\vec{v}) P_{\ell}(\cos \theta) d\omega \quad (51d)$$

$$b_k^{\ell} = \frac{1}{N_k^{\ell}} \int v^{\ell} L_k^{\ell+1/2}(v^2) f_{\ell}(v) \underline{dv} \quad (51e)$$

$$\underline{dv} = v^2 dv d\omega$$

N_k^{ℓ} est une constante de normalisation définie par la relation :

$$N_k^{\ell} = \Gamma(k + \ell + \frac{3}{2}) / (k! \Gamma(3/2)) \quad (51f)$$

dans laquelle $\Gamma(x)$ représente la fonction eulérienne. Les coefficients b_k^{ℓ} du développement (50) s'expriment très simplement en fonction des différents moments de l'anisotropie correspondante. Si l'on pose :

$$M_{2k+\ell}^{\ell} = \int v^{2k+\ell} f_{\ell}(v) \underline{dv} \quad (52)$$

et si l'on remplace dans (51e) $L_k^{\ell+1/2}(v^2)$ par son expression polynomiale, il vient :

$$b_k^{\ell} = \sum_{k'=0}^k (-1)^{k'} \binom{k}{k'} \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(k'+\ell+3/2)} \alpha^{-(2k'+\ell)/2} M_{2k'+\ell}^{\ell} \quad (53)$$

avec

$$\binom{k}{k'} = \frac{k!}{k'! (k-k')!}$$

La relation ci-dessus montre que, compte tenu de (50), la détermination des différentes anisotropies de la fonction de distribution nécessite seulement la connaissance de leurs moments successifs correspondants. Le calcul de ces moments s'effectue à partir de l'équation de Boltzmann initiale développée en série de polynômes de Legendre. On va voir par la suite que cette manière de

procéder ramène le problème de la détermination de la fonction de distribution à la résolution d'un système d'équations algébriques transcendantes au lieu d'un système d'équations intégrodifférentielles. Pour l'instant, on remarquera que le calcul des coefficients b_0^0 et b_1^0 est immédiat compte tenu de (51e) et (53). On a :

$$b_0^0 = 1 \quad \text{et} \quad b_1^0 = 0 \quad (54)$$

Le résultat (54) est évidemment spécifique du choix de la fonction poids.

On a dit plus haut que c'était dans le seul cas d'une fréquence de collision constante que la distribution de MARGENAU était maxwellienne. Cette propriété confère naturellement au gaz maxwellien un rôle privilégié et c'est à la détermination de la fonction de distribution dans un milieu de ce type que je vais m'attacher dans un premier temps.

11.2. ETUDE D'UN GAZ DE MAXWELL - LORENTZ.

Il est bien connu que l'étude d'un tel milieu est triviale. En effet, on sait depuis Maxwell qu'un gaz de particules interagissant avec une loi de force inversement proportionnelle à la puissance cinquième de la distance interparticulaire est le seul cas où la détermination de la fonction de distribution n'est pas nécessaire pour le calcul des différentes grandeurs macroscopiques et il peut paraître alors paradoxal d'entreprendre cette étude. Toutefois, par suite de la simplicité des calculs qui peuvent être menés exactement jusqu'au bout, il me semble intéressant d'effectuer ce travail. Dans ce cas, la relation de récurrence qui permet le calcul de proche en proche des moments successifs de la fonction de distribution possède des propriétés particulières dont l'exploitation revêtira un grand intérêt dans le cas général d'une fréquence de collision fonction de la vitesse.

L'étude du gaz de Maxwell-Lorentz que je vais effectuer dans ce qui suit, bien qu'évidemment limitée aux seules collisions élastiques, sera menée dans l'optique d'un rapport champ électrique sur pression élevé ($\epsilon_e \sim \epsilon_E$). Dans ce cas, on peut vraisemblablement négliger l'agitation thermique des molécules. De manière à simplifier les relations obtenues je considérerai de plus la collision comme isotrope dans le système du centre de masse. Par contre, je ne ferai, dans un premier temps aucune hypothèse relative à l'ordre de grandeur du rapport des masses des particules en présence. Dans ces conditions, et si l'on multiplie par $\sqrt{2k+l}$ l'équation de Boltzmann développée en série de polynômes de Legendre, il vient, après intégration sur l'espace des vitesses (Wa-2) :

$$\begin{aligned} M_{2k+l}^l &= (\gamma/\nu) \left\{ 2k(l+1) M_{2k+l-1}^{l+1} + l \left[2(k+l)+1 \right] M_{2k+l-1}^{l-1} \right\} / \\ & / \left[(1 - h_{2k+l}^l) (2l+1) \right] \end{aligned} \quad (55)$$

$$k = 0, 1, \dots \quad ; \quad l = 0, 1, \dots$$

avec

$$h_{2k+l}^e = \left[(1+\zeta)^2 / 2\zeta \right] \int_{\beta}^1 y^{2k+l+1} P_l [g(y)] dy \quad (55a)$$

$$g(y) = \left[(1+\zeta)y^2 - (1-\zeta) \right] / 2y\zeta \quad (55b)$$

$$\zeta = m/M = \xi^2 \quad (55c)$$

$$\beta = |1-\zeta| / (1+\zeta) \quad (55d)$$

$$\gamma = eE/m \quad (55e)$$

et compte tenu de la condition de normalisation :

$$\mathcal{M}_0^0 = \int f_0(v) dv = 1$$

Les moments successifs, définis par (55), se déterminent alors de proche en proche selon le schéma de la figure 1 ci-dessous.

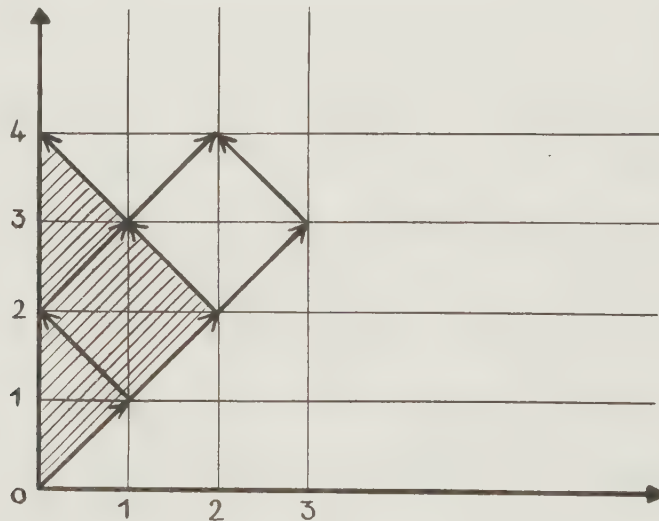


FIGURE 1

On remarque que ce schéma possède une structure "triangulaire" en ce sens que tout moment dont la somme des indices est égale, par exemple, à $2(k+l)$ est déterminée par l'ensemble des moments non nuls dont la somme des indices est inférieure ou égale à cette valeur. On conservera également cette structure triangulaire dans le cas d'une fréquence de collision fonction de la vitesse.

A partir des relations (55) on obtient alors aisément les premiers moments de la fonction de distribution. Il vient :

$$\mathcal{M}_1^1 = \frac{\gamma}{v} (1+\zeta) \quad (56a)$$

$$\mathcal{M}_2^2 = (\gamma/v)^2 \frac{2(1+\zeta)^3}{1+2\zeta} \quad (56b)$$

$$\mathcal{M}_2^0 = (\gamma/v)^2 \frac{1+\zeta}{\zeta} \quad (56c)$$

$$\mathcal{M}_3^1 = (\gamma/v)^3 \frac{(1+\zeta)^6 (5+18\zeta)}{\zeta (1+2\zeta)(3+4\zeta+9\zeta^2)} \quad (56d)$$

$$\mathcal{M}_4^0 = (\gamma/v)^4 \frac{3(1+\zeta)^{10} (5+18\zeta)}{\zeta^2 (3+2\zeta^2+3\zeta^3)(1+2\zeta)(3+4\zeta+9\zeta^2)} \quad (56e)$$

Les relations (56) ci-dessus permettent de dégager le comportement d'un moment d'ordre quelconque. En effet, on constate rapidement, au moyen de (55) et de la figure 1 que le passage à un moment d'ordre immédiatement supérieur s'effectue toujours accompagné d'un facteur (γ/v) . Ainsi, si l'on se déplace le long de la diagonale principale passant par l'origine ou sur les diagonales parallèles à celles-ci, les moments successifs se déduisent les uns des autres (en ordre de grandeur) en les multipliant par (γ/v) . Par contre, le passage d'une diagonale à une autre fait intervenir en plus le facteur $(1/\zeta)$. On peut donc écrire, de manière générale :

$$\boxed{\mathcal{M}_{2k+l}^l \sim (\gamma/v)^{2k+l} \left(\frac{1}{\zeta}\right)^k} \quad (57)$$

Les moments définis par les formules (56) vont nous permettre maintenant de préciser le comportement de la fonction de distribution. Pour cela on peut poser :

$$\frac{m}{2\kappa T'} \simeq \frac{m}{2\kappa T'_e} = \frac{3}{2} \frac{1}{\mathcal{M}_2^0} \quad (58)$$

soit :

$$v^2 = \frac{3}{2} \frac{v^2}{\mathcal{M}_2^0}$$

ce qui fixe la forme définitive de la fonction poids :

$$f^*(v) = (\beta/\pi) \exp(-\beta v^2) \quad (59)$$

$$\beta = \frac{3}{2} \left(\frac{v}{\gamma}\right)^2 \frac{\zeta}{(1+\zeta)^3} \quad (59a)$$

La relation (59) ci-dessus est, au terme $(1+\zeta)^3$ près, la distribution de MARGENAU (33) écrite pour une fréquence de collision constante. On peut remarquer que, dans le cas d'un gaz électron molécule le terme $(1+\zeta)^3$ s'identifie avec l'unité. Compte tenu de la nullité du coefficient b_1^0 , (59) représente l'approximation d'ordre un du développement (50) : elle est cohérente avec les moments $\mathcal{M}_0^0$ (condition de normalisation) et $\mathcal{M}_2^0$ défini par (56c). L'approximation d'ordre deux nécessite la connaissance du coefficient b_2^0 dont le calcul est délicat. Pour simplifier, on se placera à partir de maintenant dans le cas d'un gaz électron molécule ($\zeta \ll 1$), on a alors :

$$b_2^0 \sim \frac{64}{15} \zeta \quad (60)$$

Soit :

$$f_0^{(2)}(v) = f^*(u) \left\{ 1 + 8 \zeta \left[1 - \frac{4}{3} \beta v^2 + \frac{8}{15} (\beta v^2)^2 \right] \right\} \quad (61)$$

L'expression ci-dessus montre clairement que les termes correctifs de la distribution de MARGENAU (32) sont de la forme :

$$f^*(u) \left\{ o(\zeta) + o \left[\left(\zeta \frac{v}{\gamma} \right)^2 \right] \right\} \quad (62)$$

Ce résultat ne semble pas avoir été mis en évidence jusqu'à présent dans la littérature. A l'ordre zéro, la première anisotropie de (50) est donnée par :

$$f_1(v) = f^*(u) \frac{v v}{\gamma} \frac{\zeta}{(1+\zeta)^2} \quad (63)$$

Ainsi, les relations (59) et (63) sont suffisantes pour la détermination exacte de l'énergie moyenne $\mathcal{M}_2^0/2$ et de la vitesse de dérive $\mathcal{M}_1^1$. Ce résultat est évidemment spécifique d'un gaz maxwellien mais il éclaire d'un jour nouveau la manière d'aborder l'étude microscopique. En effet, avec la méthode de développement polynômial, et dans le cas d'une fréquence de collision quelconque, on n'a plus à se proposer de déterminer de la manière la plus précise possible la fonction de distribution. Le problème se pose au contraire dans les termes suivants : étant donné une certaine grandeur macroscopique à étudier (vitesse de dérive par exemple), jusqu'à quel ordre doit-on pousser le développement (50) de la fonction de distribution de manière à ce que la vitesse de dérive soit obtenue avec la précision choisie ? La précision avec laquelle on connaît la fonction de distribution importe peu si la précision sur la vitesse de dérive est suffisante.

Si aucun problème ne survient relativement à la convergence du développement (50), c'est-à-dire si la fonction poids est convenablement choisie, on possède ainsi un moyen systématique de détermination des grandeurs macroscopiques dans un milieu homogène, détermination que l'on peut automatiser sur ordinateur.

Nous allons en voir maintenant la première application dans le cas d'une fréquence de collision variable et en l'absence de collisions inélastiques.

11.3. DETERMINATION DES MOMENTS DANS LE CAS D'UNE FREQUENCE DE COLLISION VARIABLE.

Dans ce cas, il n'est plus possible d'écrire explicitement le moment $\mathcal{M}_{2k+l}^l$ situé dans le membre de gauche de (55) qui s'écrit maintenant :

$$4 \pi \int_0^\infty v^{2k+l+2} v(v) f_l(v) dv$$

L'expression ci-dessus peut être écrite en terme des moments en remplaçant $f_l(v)$ par le développement (50) limité à un nombre fini de termes. Si l'on respecte le schéma triangulaire du paragraphe précédent, on a le système récurrent :

$$\sum_{k=0}^{K-\ell} b_k^\ell \alpha^{-\ell/2} \overline{v}_{k,2k+\ell}^\ell = \gamma \left\{ 2k(\ell+1) \mathcal{M}_{2k+\ell-1}^{\ell+1} + \ell \left[2(k+\ell)+1 \right] \mathcal{M}_{2k+\ell-1}^{\ell-1} \right\} / (64) \\ / \left[(1 - h_{2k+\ell}^\ell)(2\ell+1) \right]$$

avec

$$\overline{v}_{k,2k+\ell}^\ell = \int_0^\infty v^{2(k+\ell)} L_k^{\ell+1/2}(v^2) f^*(v) v(v) dv \quad (64a)$$

$$k = 0, 1, \dots, K-\ell$$

On peut remarquer que :

$$\overline{v}_{k_1, k_2}^{\ell_1} = v_{k_1, k_2}^{k_2} \quad \text{si} \quad \ell_1 + k_1 = \ell_2 + k_2, \quad \forall \ell_1, \ell_2, k_1, k_2.$$

La relation de récurrence ci-dessus généralise son homologue (55). Toutefois, on ne peut plus obtenir les moments en procédant de proche en proche, ni de manière exacte. D'autre part, et par suite de la présence des intégrales $\overline{v}_{k,2k+\ell}^\ell$ le système (64) n'est pas linéaire. Il s'ensuit que sa résolution est un problème assez délicat qui, pour une fréquence de collision quelconque ne peut être abordé que de manière numérique. Cependant, on peut écrire un certain nombre de relations générales en terme des "fréquences" généralisées $\overline{v}_{k,2k+\ell}^\ell$. L'approximation d'ordre un de (50) donne :

$$f_0^{(1)}(v) = f^*(v) \quad (65a)$$

$$f_1^{(1)}(v) = f^*(v) \frac{\mathcal{M}_1^1}{\mathcal{M}_2^0} v \quad (65b)$$

On a de plus les relations :

$$a. \mathcal{M}_1^{1(1)} = \frac{\gamma}{\overline{v}_{0,1}^1} \mathcal{M}_2^{0(1)} (1+\zeta) \quad b. \mathcal{M}_2^{0(1)} = \left(\frac{\overline{v}_{0,1}^1}{\gamma} \right)^2 \frac{\zeta}{(1+\zeta)^3} \quad (66)$$

dans lesquelles l'exposant (1) indique que les moments $\mathcal{M}_1^1$ et $\mathcal{M}_2^0$ sont relatifs à l'approximation d'ordre un. Les expressions (66a) et (66b) ci-dessus généralisent (56a) et (56c) et se ramènent évidemment à celles-ci pour $v(v)$ constant. Le moment $\mathcal{M}_2^{0(1)}$ s'obtient par résolution de (66b). On peut résoudre cette équation de manière exacte si l'on admet que $v(v)$ varie comme les puissances positives de v . Alors, selon que les puissances sont paires ou impaires, il vient :

$$1 - \underline{v(v)} = a v^{2n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$\overline{v}_{0,1}^1 (\mathcal{M}_{2,0}^{0(1)}) = a \frac{(2n+3)!!}{3^{n+1}} (\mathcal{M}_2^{0(1)})^{n+1} \quad (67a)$$

$$\mathcal{M}_2^{0(n)} = \left(\frac{\gamma}{a} \right)^{\frac{2}{2n+1}} \frac{3^{\frac{2(n+1)}{2n+1}}}{[(2n+3)!!]^{\frac{2}{2n+1}}} \left[\frac{(1+\zeta)^3}{\zeta} \right]^{\frac{1}{2n+1}} \quad (67b)$$

$$2 - \underline{\nu(\nu) = \alpha \nu^{2n+1}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$\overline{\nu}_{0,1}^1 (\mathcal{M}_2^{0(1)}) = \frac{2\alpha \pi^{-1/2} (n+1)!}{(3/2)^{n+3/2}} (\mathcal{M}_2^{0(1)})^{n+3/2} \quad (68a)$$

$$\mathcal{M}_2^{0(1)} = \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n+1}} \frac{(3/2)^{\frac{2n+3}{2(n+1)}} \pi^{\frac{1}{2(n+1)}}}{\left\{4[(n+2)!]^{\frac{1}{2(n+1)}}\right\}} \left[\frac{(1+\zeta)^3}{\zeta}\right]^{\frac{1}{2(n+1)}} \quad (68b)$$

Pour une valeur de α , lorsque n croît, la fréquence de collision augmente, le freinage des électrons est plus important, l'énergie moyenne $m \mathcal{M}_2^{0(1)}/2$ décroît. C'est ce que l'on peut constater à partir des relations (67b) et (68b) : cela joue dans le sens d'un moins grand étalement de la fonction de distribution.

Les calculs relatifs à l'approximation d'ordre deux étant trop complexes et en tout cas hors de proportion avec le but recherché, je ne les effectuerai pas ici. Je proposerai dans un travail ultérieur une méthode de résolution numérique de (64) dans le cas d'une fréquence $\nu(\nu)$ quelconque.

11.4. CAS DES COLLISIONS INELASTIQUES.

Dans le cas qui nous intéresse ici où l'action du champ est comparable à celle des collisions on peut raisonnablement négliger les pertes d'énergie par collision élastique devant les pertes par collision inélastique. Alors, le système (64) prend la forme :

$$\sum_{k=0}^{K-l} b_k^l (\overline{\nu}_{k,2k+l}^{p,l} - \overline{\nu}_{k,2k+l}^{d,l}) = \gamma \left\{ 2k(l+1) \mathcal{M}_{2k+l-1}^{l+1} + l [2(k+l)+1] \mathcal{M}_{2k+l-1}^{l-1} \right\} \quad (69)$$

avec

$$\overline{\nu}_{k,2k+l}^{d,l} = \int_0^\infty v^{2k+l} v^2 L_j^{l+1/2}(u^2) f^*(u) \nu_T(v) dv \quad (70a)$$

$$\nu_{k,2k+l}^{p,l} = \delta_{0,l} \sum_j \int_0^\infty v^{2k+l} w_{0,j}^l L_j^{l+1/2}(w_{0,j}^2) f^*(w_{0,j}) \nu_{0,j}(w_{0,j}) dw \quad (70b)$$

et

$$w_{0,j}^2 = (v^2 + v_j^2)/\alpha ; \quad \nu_T(v) = \nu_{in}(v) + \nu(v) ; \quad \nu_{in}(v) = v \sum_j \sigma_{0,j}(v) = \sum_j \nu_{0,j}(v)$$

La détermination des moments successifs repose donc, comme au paragraphe précédent, sur la résolution d'un système non linéaire d'équations transcendantes et soulève évidemment les mêmes difficultés.

Mon but, dans ce deuxième chapitre, était de mettre l'accent sur la possibilité d'application des méthodes de GRAD et de MINTZER au cas d'un gaz faiblement ionisé pour de fortes valeurs du rapport champ électrique sur pression. On a vu que, pour des fréquences de collision arbitraires, le problème était essentiellement d'ordre numérique (moyennant une étude préalable portant sur les conditions d'existence et d'unicité de la solution). Comme on l'a déjà dit, cette étude fera l'objet d'un travail ultérieur.

CHAPITRE III

DETERMINATION DE LA FONCTION DE DISTRIBUTION DANS LE CADRE DE LA DEUXIEME ECHELLE DES TEMPS ET EN PRESENCE DES COLLISIONS INELASTIQUES

XXXXX

Dès l'instant que les termes de collision inélastique apparaissent dans les équations décrivant les perturbations successives de la partie isotrope de la fonction de distribution il n'est plus possible d'obtenir de manière exacte les solutions de ces équations, du moins si l'on veut conserver aux fréquences de collision leur caractère de généralité. Ce problème a été très souvent étudié dans la littérature que ce soit de manière analytique ou numérique (Ge-1), (Pe-1 à Pe-3), (Wi-1 à Wi-3), (Ko-1), (Ka-1), (Lu-1 à Lu-3), (Ho-1), (Ma-3), (Fa-1), (So-2), (Ba-5), etc... Pour obtenir des solutions analytiques exactes, la plupart des auteurs sont obligés d'adopter des représentations très particulières des fréquences de collision. Dans ces conditions, les solutions obtenues sont spécifiques du problème étudié et ne peuvent en aucun cas être généralisées à d'autres gaz. Les données relatives aux sections efficaces étant en perpétuelle évolution, il est clair qu'une telle situation ne peut être considérée comme satisfaisante et qu'il serait intéressant de pouvoir disposer de solutions, mêmes approchées, qui ne soient pas liées strictement à des formes particulières de section efficace.

Un travail dans ce sens, a été réalisé par HEYLEN et LEWIS (Le-2), (He-1). Ils proposent des solutions approchées, déterminées à l'aide des techniques asymptotiques de LANGER (La-4 à La-6) et qui semblent valables quelle que soit la forme des sections efficaces choisies. Malheureusement, ils adoptent des hypothèses de travail non justifiées (en particulier dans la zone $v \leq v_1$) qui les conduisent à des résultats erronés d'autant plus que l'utilisation des techniques asymptotiques de LANGER peut être fortement contestée dans ce cas précis. Malgré cela, l'esprit de la méthode me paraît intéressant et, une fois supprimées les erreurs figurant dans le travail d'HEYLEN et LEWIS, il est possible, comme on va le voir, d'obtenir des solutions asymptotiques présentant les caractéristiques que j'ai évoquées plus haut.

III.1. TRANSFORMATION DE L'EQUATION (43).

Pour rendre la manipulation de (43) plus commode, on va exprimer la fonction de distribution en terme de l'énergie en posant (avec un abus de langage) :

$$\varphi_{\infty}^{\ell}(\varepsilon) = \varphi^{\ell}(v) \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \frac{mv^2}{2}$$

Alors, on obtient pour (43) la nouvelle forme :

$$\frac{d^2 \varphi_{\infty}^o}{d\varepsilon} + \left[b(\varepsilon) - G(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \right] \frac{d\varphi_{\infty}^o}{d\varepsilon} + \left[2 \frac{b(\varepsilon)}{\varepsilon} + b(\varepsilon) g(\varepsilon) - 3 N_0^2 \frac{\sigma_{in} \sigma_T}{\varepsilon^2} \right] \varphi_{\infty}^o = 0 \quad (72a)$$

où l'on a posé :

$$b(\varepsilon) = 6 \zeta N_0^2 \frac{\sigma_1 \sigma_T}{\varepsilon^2} \quad (72a)$$

$$g(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma_1} \frac{d\sigma_1}{d\varepsilon} ; \quad (72b)$$

$$G(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma_T} \frac{d\sigma_T}{d\varepsilon} \quad (72c)$$

$$\sigma_1(\varepsilon) = \sigma_{0,0,1}(\varepsilon) \quad (72d)$$

$$\sigma_{in}(\varepsilon) = \sum_j \sigma_{0,j,0}(\varepsilon) \quad (72e)$$

$$\sigma_T(\varepsilon) = \sigma_{0,0,1}(\varepsilon) + \sigma_{in,0}(\varepsilon) \quad (72f)$$

et où l'on a négligé l'agitation thermique des molécules. Si l'on effectue le changement de fonction inconnue :

$$\varphi_{\infty}^o(\varepsilon) = W(\varepsilon) \left(\frac{\sigma_T}{\varepsilon} \right)^{1/2} \exp \left[- \frac{1}{2} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon} b(y) dy \right] \quad (73)$$

l'équation (71) ci-dessus prend alors la forme réduite :

$$\boxed{\frac{d^2 W}{d\varepsilon^2} + \Phi(\varepsilon) W = 0} \quad (74)$$

avec :

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{1}{4\varepsilon^2} + \frac{G(\varepsilon)}{2\varepsilon} + \frac{b(\varepsilon)g(\varepsilon)}{2} - \frac{b(\varepsilon)^2}{4} - \frac{G(\varepsilon)^2}{4} - 3 N_0^2 \frac{\sigma_{in} \sigma_T}{\varepsilon^2} \quad (75)$$

Dans la zone $v \geq v_1$, on doit évidemment associer à (74) les conditions aux limites :

$$W(\varepsilon_1) = \left[\frac{\varepsilon_1}{\sigma_T(\varepsilon_1)} \right]^{1/2} \varphi^o(\varepsilon_1) \quad (76a)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} W(\varepsilon) = 0 \quad (76b)$$

Dans la zone $v \leq v_1$, la fonction de distribution $\varphi^o(\epsilon)$ obéit à l'équation (47) qui donne après intégration :

$$\begin{aligned} \varphi^o(\epsilon) = \exp \left[- \int_{\epsilon}^{\epsilon_1} b(y) dy \right] \times \\ \times \left\{ \varphi_{\infty}^o(\epsilon_1) + N_0^2 \int_{\epsilon}^{\epsilon_1} \frac{3 \sigma_T(u)}{E^2 u} du \left[\sum_j \int_u^{u+\epsilon_j} y \sigma_{o,j;0}(y) \varphi_{\infty}^o(y) dy + \psi(\epsilon_1) \right] \right. \\ \left. \times \exp \left[\int_u^{\epsilon_1} b(y) dy \right] \right\} \end{aligned} \quad (77)$$

avec :

$$\psi(\epsilon_1) = \frac{E^2 \epsilon_1}{3 \sigma_T(\epsilon_1)} \left[b(\epsilon_1) \varphi_{\infty}^o(\epsilon_1) + \left[\frac{d\varphi_{\infty}^o}{d\epsilon} \right]_{\epsilon_1} \right] + \sum_j \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_1 + \epsilon_j} y \sigma_{o,j;0}(y) \varphi_{\infty}^o(y) dy \quad (78)$$

On voit bien que la relation ci-dessus se ramène à la distribution de MARGENAU si les collisions inélastiques sont négligeables. D'autre part, il est évident que la connaissance de $\varphi^o(\epsilon)$ pour $v \leq v_1$ repose seulement sur celle de $\varphi_{\infty}^o(\epsilon)$. Le problème de la détermination de la partie isotrope de la fonction de distribution est donc uniquement celui de la résolution de (74).

Pour résoudre (74) dans l'esprit du travail d'HEYLEN et LEWIS, il me paraît plus simple d'adopter la méthode de développement asymptotique proposée par FESHCHENKO et alii (Fe-1) et qui s'applique à des équations différentielles du type "équations à coefficients lentement variables". On trouvera le principe de cette méthode dans l'appendice II-1.

III.2. SOLUTION ASYMPTOTIQUE DE (74).

Supposons que $\Phi(\epsilon)$ défini par (75) prenne pour tout $\epsilon \geq \epsilon_1$ des valeurs suffisamment élevées. On peut alors introduire un grand paramètre λ en posant :

$$\lambda^2 = \sup_{\forall \epsilon \geq \epsilon_1} |\Phi(\epsilon)| \quad (79)$$

Si l'on introduit la fonction :

$$\Psi(\epsilon) = \Phi(\epsilon) / \lambda^2 \quad (80)$$

l'équation (74) s'écrit :

$$\frac{d^2 W(\epsilon)}{d\epsilon^2} + \lambda^2 \Psi(\epsilon) W(\epsilon) = 0 \quad (81)$$

Si l'on considère ϵ comme une variable lente, et si l'on pose :

$$\epsilon = \lambda^{-1} t$$

il vient :

$$\boxed{\frac{d^2 W(t)}{dt^2} + \Psi(\epsilon) W(t) = 0} \quad (82)$$

qui est une équation à coefficients lentement variables du type (AI-2). Compte tenu de (AI-14), on peut écrire :

$$\begin{aligned} D_0(\epsilon) &= [-\Psi(\epsilon)]^{1/2} = [-\Phi(\epsilon)]^{1/2} / \lambda \\ D_0(\epsilon) &= -i [\Phi(\epsilon)]^{1/2} / \lambda \end{aligned} \quad (83)$$

L'expression (83) nous conduit à la solution d'ordre zéro :

$$\boxed{W^{(0)}(\epsilon) = K \exp \left\{ \pm i \int_{\epsilon_1}^{\epsilon} [\Phi(y)]^{1/2} dy \right\}} \quad (84)$$

Si l'on pousse plus loin le développement, il vient :

$$\frac{dW^{(1)}(\epsilon)}{d\epsilon} = \pm \left\{ -i [\Phi(\epsilon)]^{1/2} - \frac{D_0'(\epsilon)}{2 D_0(\epsilon)} \right\} W^{(1)}(\epsilon)$$

soit :

$$\boxed{W^{(1)}(\epsilon) = \frac{1}{|\Phi(\epsilon)|^{1/4}} W^{(0)}(\epsilon)} \quad (85)$$

De même pour l'approximation d'ordre deux :

$$\boxed{W^{(2)}(\epsilon) = W^{(1)}(\epsilon) \exp \left(- \frac{d\Phi}{d\epsilon} \right)} \quad (86)$$

De manière générale, toute solution asymptotique d'ordre supérieur ou égal à un peut être représentée par la relation :

$$\boxed{W^{(m)}(\epsilon) = W^{(1)}(\epsilon) \exp [\Theta(\epsilon)]} \quad (87)$$

où $\Theta(\epsilon)$ s'exprime en fonction des dérivées de $\Phi(\epsilon)$ et de leurs puissances.

Les relations ci-dessus sont valables pour une fonction $\Phi(\epsilon)$ à valeurs réelles mais non nulles. Tout point où $\Phi(\epsilon)$ s'annule est un point de rebroussement et les développements asymptotiques doivent être abandonnés. En fait, dans la plupart des gaz usuels (gaz rares en particulier) $\Phi(\epsilon)$ est strictement négative au-dessus du premier seuil d'excitation. Si l'on se restreint à des

situations de ce type, la relation (84) s'écrit en ne conservant que la solution nulle à l'infini :

$$W^{(0)}(\varepsilon) = \kappa \exp \left[- \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon} |\Phi(y)|^{1/2} dy \right] \quad (88)$$

Les relations (85) et (86) demeurant évidemment inchangées. On remarque que la solution $W^{(1)}(\varepsilon)$ est la solution de HEYLEN et LEWIS que ces auteurs obtenaient au moyen des techniques asymptotiques de LANGER. On peut également remarquer que pour $\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon} |\Phi(y)|^{1/2} dy$ suffisamment grand, $W^{(1)}(\varepsilon)$ est la forme asymptotique de l'expression :

$$\left[|\Phi(\varepsilon)|^{-1/2} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon} |\Phi(y)|^{1/2} dy \right] K_{1/3} \left[\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon} |\Phi(y)|^{1/2} dy \right] \quad (89)$$

qui est la solution de (74) obtenue au moyen de la méthode W. K. B. et dans laquelle $K_{1/3}$ désigne une fonction de BESSEL modifiée. Il est facile de voir également que les approximations d'ordre zéro et un sont valables dans la mesure où les inégalités :

$$E_r^{(0)} = \frac{1}{2} \frac{|d\Phi/d\varepsilon|}{|\Phi|^{1/2}} \ll 1 \quad (90a)$$

$$E_r^{(1)} = \frac{1}{4 |\Phi|^{5/4}} \left[\frac{d^2 \Phi}{d\varepsilon^2} + \frac{5}{4} \frac{(d\Phi/d\varepsilon)^2}{\Phi} \right] \ll 1 \quad (90b)$$

sont respectivement vérifiées. On peut remarquer, de plus, que la séquence des solutions asymptotiques convergera d'autant plus rapidement que le rapport $\frac{d|\Phi|}{d\varepsilon} / |\Phi|^{1/2}$ sera plus faible. En fait, il n'en est pas ainsi dans la plupart des cas, et c'est l'une des raisons du comportement erroné des solutions obtenues par HEYLEN et LEWIS. On reviendra sur ce point un peu plus loin.

Lorsque $\frac{d|\Phi|}{d\varepsilon} / |\Phi|^{1/2}$ est trop haut (essentiellement aux faibles valeurs du rapport E/P) il est possible de tourner la difficulté en déduisant de (74) une nouvelle équation dans laquelle $\frac{d|\Phi|}{d\varepsilon} / |\Phi|^{1/2}$ intervient comme grand paramètre. Pour cela, effectuons dans (74) le changement de fonction inconnue :

$$W(\varepsilon) = W^{(0)}(\varepsilon) H(\varepsilon) \quad (91)$$

On aboutit à l'équation :

$$\frac{d^2 H}{d\varepsilon^2} - 2 |\Phi|^{1/2} \frac{dH}{d\varepsilon} - \frac{|\Phi|'}{2 |\Phi|^{1/2}} H = 0 \quad (92)$$

que l'on peut transformer en équation à coefficients lentement variables en posant :

$$\lambda^2 = \sup_{\forall \varepsilon \geq \varepsilon_1} \frac{d|\Phi|/d\varepsilon}{2 |\Phi|^{1/2}} \quad (93a)$$

$$\varepsilon = \lambda t \quad (93b)$$

On a alors :

$$\frac{d^2 H}{dt^2} - 2 \lambda |\Phi|^{1/2} \frac{dH}{dt} - \frac{d|\Phi|/d\varepsilon}{2 |\Phi|^{1/2}} \cdot \lambda^{-2} H = 0 \quad (94)$$

Si l'on admet que la dérivée $\frac{d|\Phi|}{d\varepsilon}$ est positive, l'équation ci-dessus permet d'obtenir à l'ordre zéro l'expression :

$$H^{(0)}(\varepsilon) = \exp \left\{ - \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon} \left[\frac{d\Phi/dy}{2|\Phi|^{1/2}} \right]^{1/2} dy \right\} \quad (95)$$

Dans ces conditions, la "queue" de la fonction de distribution, relative à l'approximation d'ordre zéro s'écrit :

$$\varphi_{\infty}^{(0)}(\varepsilon) = \frac{\sigma_T}{\varepsilon} \exp \left\{ - \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon} \left[\frac{1}{2} b(y) + |\Phi(y)|^{1/2} + \left(\frac{|\Phi'|}{2\sqrt{|\Phi|}} \right) \right] dy \right\} \quad (96)$$

L'expression ci-dessus permet de rendre compte de l'influence sur la solution asymptotique des variations des fonctions $\Phi(\varepsilon)$ et $|\Phi|^{1/2}\sqrt{\Phi}$. En effet, si l'on a l'inégalité :

$$\left| \frac{d|\Phi|}{d\varepsilon} \right| \ll 2|\Phi|, \quad \forall \varepsilon \gg \varepsilon_1 \quad (97)$$

on peut utiliser (96) mais la solution (88) est suffisante pour rendre compte correctement du comportement de la "queue" de la fonction de distribution. Si l'inégalité (97) ci-dessus est inversée (ce qui se produit habituellement au voisinage du premier seuil d'excitation) alors seule la relation (96) peut être utilisée. Dans tous les cas donc la solution (96) (que l'on peut améliorer en faisant intervenir les termes $H^{(e)}$ correspondant aux approximations d'ordre supérieur) permet une bonne approximation de la solution exacte du problème. Les seules conditions importantes à respecter concernent la négativité de $\Phi(\varepsilon)$ pour $\varepsilon \geq \varepsilon_1$ et la positivité de $d|\Phi|/d\varepsilon$.

On va voir par la suite que, compte tenu du choix de l'ensemble des valeurs de E/p que l'on est contraint d'adopter de manière à ce que la deuxième échelle des temps soit respectée, les conditions ci-dessus sont toujours vérifiées en pratique.

L'expression (96) ci-dessus représente la solution d'ordre zéro du développement (31). La solution d'ordre un s'obtient par résolution de l'équation (45). La partie homogène de (45) est identique à (43). Par suite, la solution générale de (45) s'exprimant en terme de deux solutions particulières de l'équation homogène associée, il s'ensuit que la solution générale approchée de (45) nécessite simplement la connaissance de (96) partie exponentiellement décroissante de la solution, et de l'inverse de (96), deuxième solution particulière approchée de (74), et qui représente la partie exponentiellement croissante de la solution.

Compte tenu de leur complexité, je ne donnerai pas ici le résultat de ces calculs (que je me propose d'ailleurs de traiter dans un travail ultérieur). Pour l'instant, comme on le verra au cours du paragraphe suivant, la connaissance de (96) est suffisante pour une estimation correcte du comportement de la "queue" de la fonction de distribution.

11.3. RESULTATS NUMERIQUES.

Les graphes donnent l'allure des fonctions de distribution obtenues avec $W^{(0)}$ et $W^{(1)}$ comparées aux résultats obtenus par résolution numérique directe de l'équation (cf. appendice II) ont représentés sur les figures 2, 3 et 4 pour trois valeurs du rapport E/p respectivement. Sur la figure 5, on a porté $W^{(0)}$ et $W^{(1)}$ en coordonnées linéaires. La première remarque est que la solution $W^{(1)}$ s'écarte fortement de la solution exacte et cela d'autant plus sévèrement que l'on est plus près du premier seuil d'excitation. Par contre, aux énergies plus élevées, les trois graphes sont approximativement parallèles. La justification de ce comportement peut être trouvée dans la variation de la fonction Φ et de ses dérivées. Au voisinage de ϵ_1 , les conditions (90) sont totalement en défaut. Ces relations ne deviennent valables qu'à partir d'une valeur suffisamment grande de ϵ . On sait que le rapport $\Phi'/\sqrt{|\Phi|}$ représente une mesure de l'erreur commise. Le graphe de $\Phi'/\sqrt{|\Phi|}$ est représenté sur la figure 6 au voisinage du premier seuil d'excitation. Il est clair que, dans ce cas, et comme on l'a déjà dit plus haut, $\Phi'/\sqrt{|\Phi|}$ est très grand et que, en principe les solutions $W^{(0)}$ et $W^{(1)}$ doivent être rejetées. Toutefois, l'examen des figures 2, 3 et 4 indique une grande différence entre $W^{(0)}$ et $W^{(1)}$. $W^{(0)}$ semble être une bonne représentation de $\varphi_{\infty}^0(\epsilon)$ à l'inverse de $W^{(1)}$. L'explication de cet écart entre les deux solutions asymptotiques peut être aisément obtenu si l'on analyse le comportement de leurs dérivées premières. Il vient :

$$\frac{dW^{(0)}(\epsilon)}{d\epsilon} = - |\Phi(\epsilon)|^{1/2} W^{(0)}(\epsilon) \quad (98)$$

$$\frac{dW^{(1)}(\epsilon)}{d\epsilon} = - \left[1 + \frac{|\Phi'|}{|\Phi|^{1/2}} \cdot \frac{1}{4|\Phi|} \right] \Phi^{1/4}(\epsilon) W^{(0)}(\epsilon) \quad (99)$$

La dérivée première de $W^{(1)}$ étant proportionnelle au rapport $-|\Phi'|/|\Phi|^{1/2}$, elle prend donc des valeurs extrêmement élevées et négatives au voisinage de ϵ_1 . Ceci justifie le brusque décrochage de $W^{(1)}$ que l'on peut observer sur les figures 2, 3 et 4. La présence de ce décrochage est donc une conséquence de la valeur élevée de $|\Phi'|/|\Phi|^{1/2}$ pour laquelle le développement asymptotique que nous avons effectué jusqu'à maintenant n'est plus valable. Le comportement favorable de la solution obtenue avec $W^{(0)}$ semble dû au fait que au voisinage de ϵ_1 elle n'est pas très éloignée de la distribution de MARGENAU. D'autre part, comme on l'a déjà vu, plus on s'éloigne du premier seuil d'excitation et plus le rapport $|\Phi'|/|\Phi|^{1/2}$ diminue. Dans ces conditions, le comportement de la "queue" de la fonction de distribution est de plus en plus conditionné par l'influence des collisions inélastiques et la solution asymptotique $W^{(0)}$ tient compte convenablement de ce phénomène. Cependant, et comme on l'a déjà dit, l'étude complète de ce problème exige la prise en considération de la solution (96). Toutefois, pour des valeurs de E/p inférieures à $10 \text{ V.cm}^{-1} \cdot \text{Torr}^{-1}$, on va voir que la solution déterminée à partir de $W^{(0)}$ conduit à des résultats suffisamment précis. La figure 7 donne les variations en fonction de E/p de la vitesse de dérive v_d , de l'énergie moyenne $\bar{\epsilon}$ et du coefficient de diffusion D . P.. Ces paramètres sont obtenus de deux manières différentes, par résolution numérique directe de l'équation (AI-2) et à partir de la solution asymptotique $W^{(0)}$. Il est clair que les différences dans les deux cas sont minimales jusqu'à environ $10 \text{ V.cm}^{-1} \cdot \text{Torr}^{-1}$. Si elles sont plus importantes au-dessus de cette valeur, le comportement global des graphes est cependant toujours respecté.

Aux grandeurs macroscopiques ci-dessus, obtenues à partir de $W^{(0)}$, correspondent les courbes de la figure 8 relatives à la fonction de distribution en énergie des électrons. Les graphes

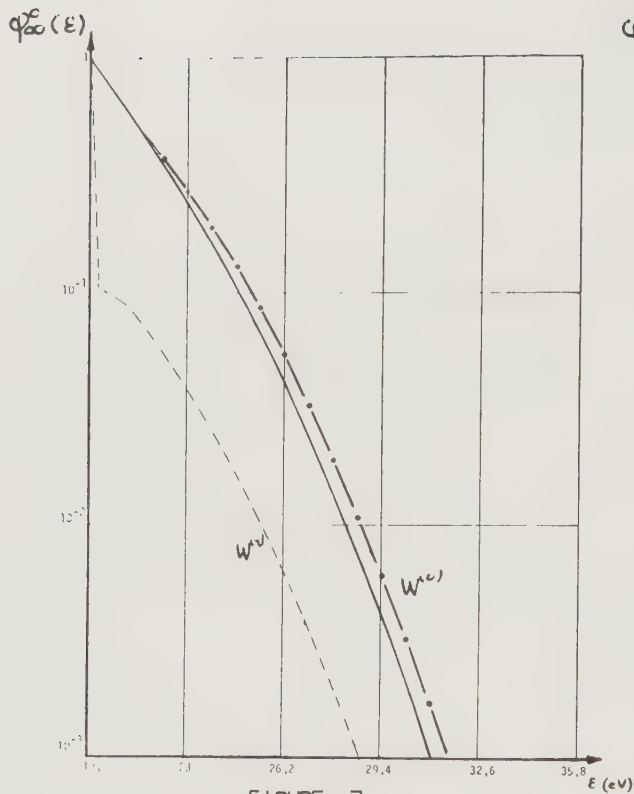


FIGURE 2

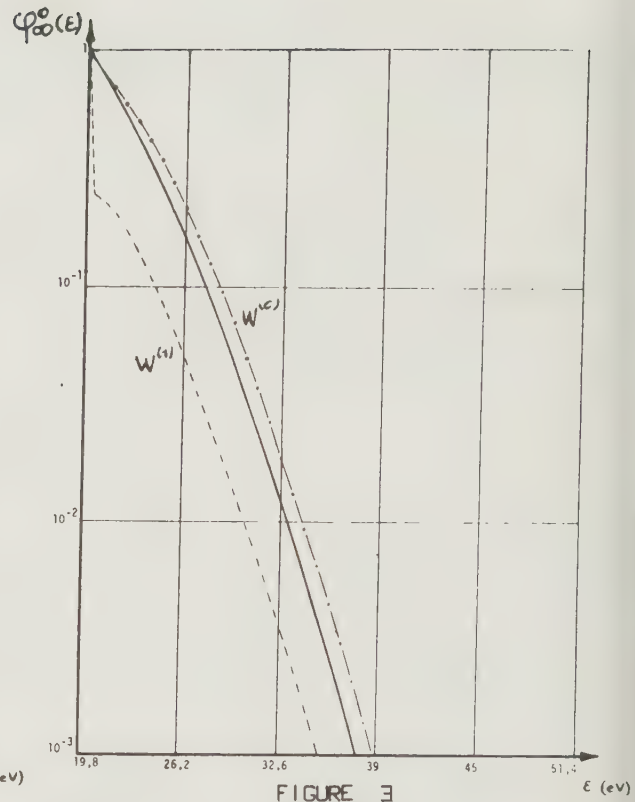


FIGURE 3

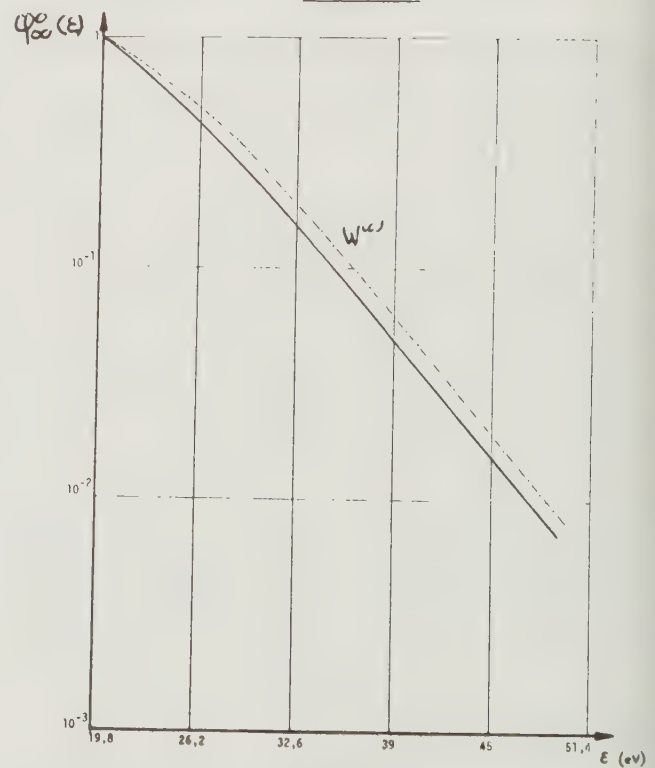


FIGURE 4

— RESOLUTION NUMERIQUE

FIGURE 2

HELIUM, $E/P = 5 \text{ V.cm}^{-1}.\text{Torr}^{-1}$.

FIGURE 3

HELIUM, $E/P = 10 \text{ V.cm}^{-1}.\text{Torr}^{-1}$.

FIGURE 4

HELIUM, $E/P = 30 \text{ V.cm}^{-1}.\text{Torr}^{-1}$.

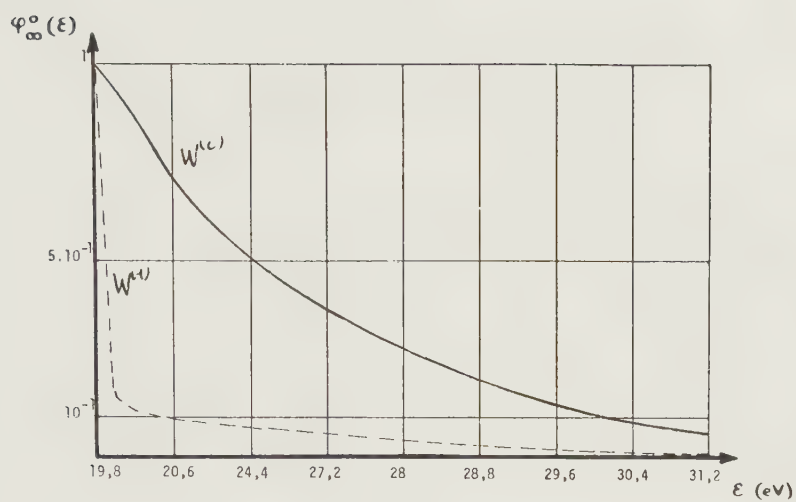


FIGURE 5

HELIUM, $E/P = 5$ V, cm⁻¹ Torr⁻¹.

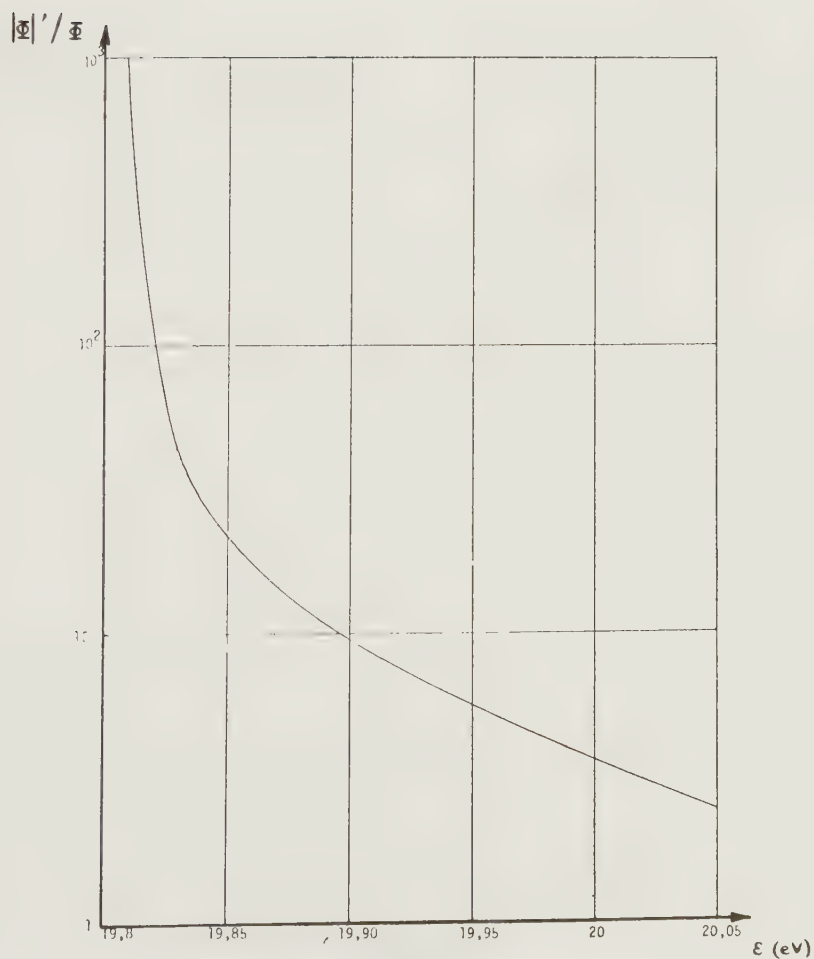


FIGURE 6

HELIUM, $E/P = 8$ V, cm⁻¹ Torr⁻¹.

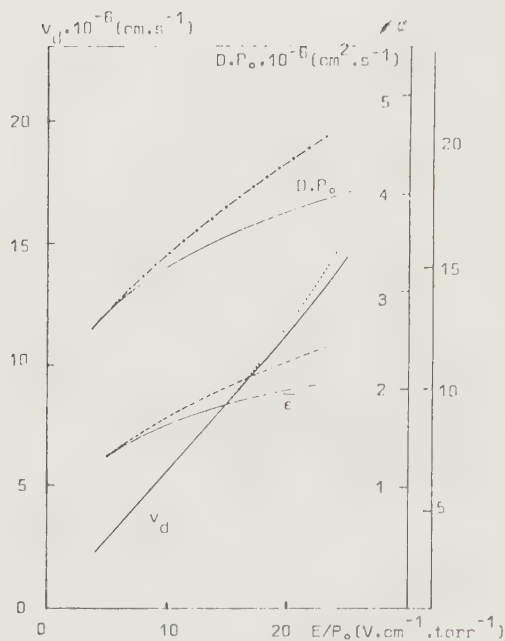


FIGURE 7

v_d , VITESSE DE DERIVE.
 D , COEFFICIENT DE DIFFUSION.
 $\langle \epsilon \rangle$, ENERGIE MOYENNE.

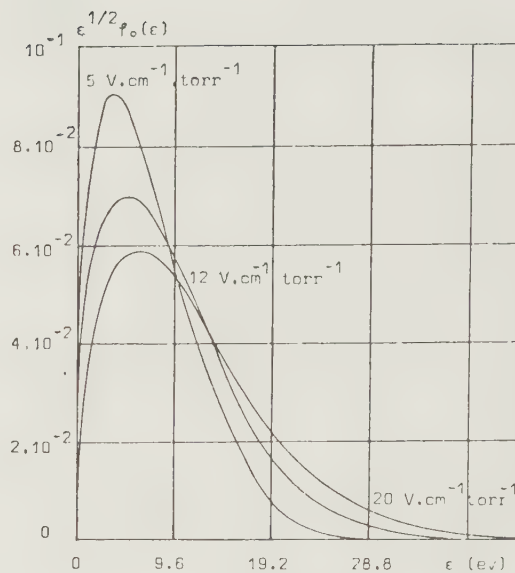


FIGURE 8

SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES DE LA FONCTION DE
 DISTRIBUTION POUR TROIS VALEURS DE E/P.

— RESOLUTION NUMERIQUE

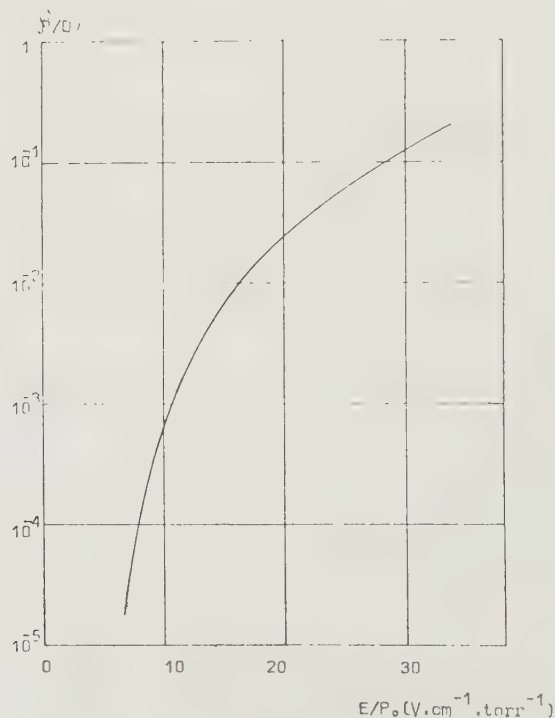


FIGURE 9

VARIATION EN FONCTION DE E/P DU RAPPORT TERME DE POPULATION (9)
 SUR TERME DE DEPOPULATION (5).

ne présentent évidemment plus de décrochages comme c'était le cas dans les résultats d'HEYLEN et LEWIS. Sur la figure 9, par ailleurs, j'ai porté en fonction de E/p le rapport des taux d'excitation relatifs respectivement aux termes de population et de dépopulation des opérateurs de collision inélastique. Il est immédiat que l'influence du terme de population peut être négligée même jusqu'à des valeurs de E/p de l'ordre de 20 V.cm .Torr . Ce résultat est d'ailleurs une justification à posteriori des échelles de temps (38), (40) et (41).

Les résultats que j'ai obtenus dans ce qui précède mettent clairement en évidence la nature des erreurs commises par HEYLEN et LEWIS. Leur relation, qui correspond à la solution $\mathcal{W}^{(1)}$ proposée ici ne peut être utilisée compte tenu des valeurs trop élevées du rapport $|\Phi'|/|\Phi|^{1/2}$ au voisinage du premier seuil d'excitation $\mathcal{E}_1$. Pour éliminer cette difficulté, je propose une nouvelle méthode de résolution basée sur les techniques asymptotiques de FESCHENKO et alii. Ces solutions qui sont valables à condition que $\Phi(\epsilon)$ soit négatif et $|\Phi'|/\sqrt{|\Phi|}$ positif, sont en bon accord avec les valeurs obtenues par résolution numérique directe de l'équation (AII-1). Par contre, elles sont d'un emploi très simple et nécessitent sur ordinateur un temps de calcul réduit.

Comme elles sont indépendantes de la forme précise des sections efficaces, elles se généralisent immédiatement à n'importe quel type de gaz monoatomique une fois vérifié que les contraintes sur Φ et $|\Phi'|/\sqrt{|\Phi|}$ sont respectées.

APPENDICE II - 1

TECHNIQUES DE RESOLUTION ASYMPTOTIQUE

XXXXX

Je me propose, dans ce qui suit, d'obtenir des solutions asymptotiques d'équations différentielles homogènes du second ordre à coefficients variables. Je me limiterai à une classe d'équations dites à "coefficients lentement variables" de laquelle on peut extraire les deux équations suivantes :

$$a(\tau, \alpha) \frac{d^2 g}{d\tau^2} + \alpha b(\tau, \alpha) \frac{dg}{d\tau} + c(\tau, \alpha) g = 0 \quad (A1-1)$$

$$a(\tau, \alpha) \frac{d^2 g}{d\tau^2} + b(\tau, \alpha) \frac{dg}{d\tau} + c(\tau, \alpha) g = 0 \quad (A1-2)$$

dans lesquelles les coefficients a , b et c peuvent être développés en série d'un petit paramètre α de telle sorte que :

$$a(\tau, \alpha) = \sum_{\delta=0}^{\infty} \alpha^{\delta} a_{\delta}(\tau) \quad (A1-3a)$$

$$b(\tau, \alpha) = \sum_{\delta=0}^{\infty} \alpha^{\delta} b_{\delta}(\tau) \quad (A1-3b)$$

$$c(\tau, \alpha) = \sum_{\delta=0}^{\infty} \alpha^{\delta} c_{\delta}(\tau) \quad (A1-3c)$$

La variable τ représente une variable dite "lente" définie par :

$$\tau = \alpha t$$

Les relations (A1-3) ci-dessus montrent que les coefficients a , b et c ont leurs dérivées premières proportionnelles à α : cette propriété justifie l'appellation attribuée plus haut aux équations (A1-1) et (A1-2).

L'équation (A1-1) est écrite sous la forme type proposée par FESHCHENKO. Dans ce cas, le coefficient de dg/dr varie plus lentement que son homologue dans (A1-2). En fait, si l'on remarque que (A1-2) contient (A1-1), on n'aura besoin dans ce qui suit que des résultats relatifs à (A1-2). L'étude de (A1-1) sera effectuée seulement pour mémoire.

1. SOLUTION ASYMPTOTIQUE DE (A1-1).

L'existence de solutions asymptotiques est ici essentiellement liée à la relation :

$$a_0(z) \neq 0 \quad (A1-4)$$

Une fois (A1-4) vérifiée, on peut montrer (Fe-1) que, à condition que les coefficients de (A1-1) soient infiniment dérivables par rapport à z sur un intervalle fermé $[0, T]$ alors, toute solution particulière h de (A1-1) est telle que :

$$\frac{dh}{dr} = [D(z, \alpha) + i \Omega(z, \alpha)] h = 0 \quad (A1-5)$$

avec

$$D(z, \alpha) = \sum_{\delta=1}^{\infty} \alpha^{\delta} D_{\delta}(z) \quad (A1-6a)$$

$$\Omega(z, \alpha) = \sum_{\delta=0}^{\infty} \alpha^{\delta} \Omega_{\delta}(z) \quad (A1-6b)$$

La relation (A1-5) s'obtient en effectuant un développement en série des puissances de α de la solution de l'équation de RICCATI associée à (A1-1). Alors, en portant (A1-5) et sa dérivée première dans (A1-1), il vient :

$$- a_0(z) \Omega_0'(z) + c_0(z) = 0 \quad (A1-7)$$

$$D_0(z) = 0 \quad (A1-8)$$

$$\Omega_1(z) = \frac{c_1(z) - a_1(z) \Omega_0'(z)}{2 \Omega_0(z) a_0(z)} \quad (A1-9)$$

$$D_1(z) = - \frac{a_0(z) \Omega_0'(z) - b_0(z) \Omega_0(z)}{2 \Omega_0(z) a_0(z)} \quad (A1-10)$$

$$\begin{aligned} D_{\delta}(z) + i \Omega_{\delta}(z) = & \frac{1}{2 i a_0(z) \Omega_0(z)} \left[- a_0(z) \sum_{j=1}^{\delta-1} (D_j(z) + i \Omega_j(z)) (D_{\delta-j}(z) + i \Omega_{\delta-j}(z)) \right. \\ & + \sum_{j=1}^{\delta} \sum_{m=0}^{\delta-j} a_j(z) (D_m(z) + i \Omega_m(z)) (D_{\delta-j-m}(z) + i \Omega_{\delta-j-m}(z)) + \sum_{j=0}^{\delta-1} a_j(z) (D_{\delta-1-j}(z) \\ & \left. + i \Omega_{\delta-1-j}(z))' + \sum_{j=0}^{\delta-1} b_j(z) (D_{\delta-1-j}(z) + i \Omega_{\delta-1-j}(z)) + c_{\delta}(z) \right] \quad (A1-11) \end{aligned}$$

Dans les relations précédentes, le signe ' signifie que l'on dérive Ω_Δ et D_Δ par rapport à z . Par suite, toute solution asymptotique de (A1-1) est obtenue par intégration d'une équation différentielle du premier ordre. Les solutions sont donc valables quels que soient les coefficients $a(z, \alpha)$, $b(z, \alpha)$, $c(z, \alpha)$ pourvu qu'ils soient développables en série des puissances de α , et qu'ils vérifient (A1-4). Le seul problème délicat est précisément lié à ce développement en série. En effet, la limitation d'un développement aux premiers termes ne représente souvent (et même s'il y a convergence) qu'une très grossière approximation de la fonction initiale par suite de la présence des termes séculaires (Bo-1). Le développement ainsi tronqué n'est valable que pour des valeurs de z très petites. Ceci provient essentiellement du fait que chaque terme d'ordre supérieur dans le développement n'est pas une petite perturbation uniformément par rapport au terme précédent. Ainsi, il est nécessaire de limiter l'étude dans un intervalle petit (ici $[0, T]$) afin d'éliminer cette difficulté.

Toutefois, les solutions que nous cherchons décroissent rapidement en fonction de z et de façon monotone. On peut raisonnablement espérer que les solutions asymptotiques s'écarteront de la solution exacte dans une zone où leur contribution au calcul des paramètres macroscopiques sera négligeable.

II. SOLUTION ASYMPTOTIQUE DE (A1-2).

Dans ce cas, la solution est donnée également par une équation du type (A1-5) mais en posant :

$$D(z, \alpha) = \sum_{\Delta=0}^{\infty} \alpha^\Delta D_\Delta(z) \quad (A1-12a)$$

$$\Omega(z, \alpha) = \sum_{\Delta=1}^{\infty} \alpha^\Delta \Omega_\Delta(z) \quad (A1-12b)$$

Alors, la relation générale permettant de calculer les Ω_Δ et D_Δ s'écrit :

$$\sum_{j=0}^{\Delta} \sum_{m=0}^{\Delta-j} a_j(z) (D_m(z) + i \Omega_m(z)) (D_{\Delta-j-m}(z) + i \Omega_{\Delta-j-m}(z)) + \sum_{j=0}^{\Delta-1} a_j(z) (D_{\Delta-1-j}(z) + i \Omega_{\Delta-1-j}(z))' + \sum_{j=0}^{\Delta} b_j(z) (D_{\Delta-j}(z) + i \Omega_{\Delta-j}(z)) + c_\Delta(z) = 0 \quad (A1-13)$$

On obtient aisément les différents coefficients :

$$D_0(z) = \frac{-b_0(z) \pm (b_0^2(z) - 4a_0(z)c_0(z))^{1/2}}{2a_0(z)} \quad (A1-14)$$

$$\Omega_0(z) = 0 \quad (A1-15)$$

$$D_1(z) = \frac{-a_0(z)D_0'(z) - a_1(z)D_0^2(z) - b_1(z)D_0(z) - c_1(z)}{2a_0(z)D_0(z) + b_0(z)} \quad (A1-16)$$

$$\begin{aligned}
 D_{\delta}(z) + i \Omega_{\delta}(z) = & - \frac{1}{2 a_0(z) D_0 + b_0(z)} \left[\sum_{j=1}^{\delta} \sum_{m=0}^{\delta-j} a_j(z) (D_m(z) + i \Omega_m(z)) (D_{\delta-j-m}(z) \right. \\
 & + i \Omega_{\delta-j-m}(z)) + \sum_{j=0}^{\delta-1} a_j(z) (D_{\delta-1-j}(z) + i \Omega_{\delta-1-j}(z)) + \\
 & \left. + \sum_{j=1}^{\delta} b_j(z) (D_{\delta-j}(z) + i \Omega_{\delta-j}(z)) + c_0(z) \right]
 \end{aligned}
 \tag{A1-17}$$

On voit que les seules contraintes à imposer sont :

$$a_0(z) \neq 0, \quad 2 a_0(z) D_0(z) + b_0(z) \neq 0 \tag{A1-18}$$

Comme pour la théorie des équations différentielles à coefficient constant le type de solution (exponentielle ou oscillatoire) est déterminé par une équation caractéristique relative, dans notre cas, à l'ordre zéro dans le développement, soit :

$$a_0(z) D_0^2(z) + b_0(z) D_0(z) + c_0(z) = 0 \tag{A1-19}$$

APPENDICE II - 2

RESOLUTION NUMERIQUE DE L'EQUATION (43) (OU (71))

De nombreux travaux ont été consacrés depuis quelques années à ce problème, toutefois les méthodes proposées ne sont pas toutes d'égale valeur. La plupart ne reposent d'ailleurs sur aucune considération mathématique sérieuse. Le travail le plus rigoureux dans ce domaine semble être celui de SHERMAN (Sh-1) qui constituait le support théorique des calculs de FROST et PHELPS (Fr-1).

Dans son étude, SHERMAN ne travaillait pas exactement sur (43) mais sur une forme déduite de celle-ci en traitant sur un même plan d'égalité les termes de population et de dépopulation des opérateurs de collision inélastique. Sous sa forme intégrodifférentielle, cette équation s'écrit :

$$\frac{d\varphi_{\infty}^0}{d\varepsilon} + b(\varepsilon) \varphi_{\infty}^0 = - \sum_j \frac{3 N_0^+ \sigma_T}{E^2 \varepsilon} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon + \varepsilon_j} \eta \sigma_{0j,0}(\eta) \varphi_{\infty}^0(\eta) d\eta \quad (A2-1)$$

SHERMAN a ainsi montré l'existence et l'unicité de la solution de (A2-1) compte tenu des conditions :

$$a - \varphi_{\infty}^0(\varepsilon) > 0 \quad ; \quad b - \int_0^{\infty} \varphi_{\infty}^0(\varepsilon) d\varepsilon = 1 \quad ; \quad c - \int_0^{\infty} \varepsilon \varphi_{\infty}^0(\varepsilon) d\varepsilon < \infty \quad (A2-2)$$

qui impliquent que φ_{∞}^0 soit partout positive, normée et bornée. Il a ensuite proposé un schéma de résolution numérique basé sur l'étude itérative d'un opérateur intégral, déduit de (A2-1), et défini par :

$$K_{\varepsilon_1} [\Psi(\gamma, \eta)] = N_0^2 \sum_j \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon} \frac{3 \sigma_T}{E^2 \gamma} d\gamma \int_{\gamma}^{\gamma + \varepsilon_j} \eta \sigma_{0j,0}(\eta) \Psi(\gamma, \eta) d\eta \quad (A2-3)$$

Alors l'équation (A2-1) s'écrit, une fois intégrée, sous la forme :

$$\varphi_{\infty}^0(\varepsilon) = \varphi_{\infty}^0(\varepsilon_1) \exp \left[- \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon} b(\eta) d\eta - K_{\varepsilon_1} \left(\frac{\varphi_{\infty}^0(\eta)}{\varphi_{\infty}^0(\gamma)} \right) \right] \quad (A2-4)$$

Dans ces conditions, et si l'on définit, la formule de récurrence :

$$I_n(\varepsilon) = \exp \left[- \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon} b(\eta) d\eta - K_{\varepsilon_1} \left(\frac{I_{n-1}(\eta)}{I_{n-1}(\gamma)} \right) \right] \quad (A2-5)$$

avec $I_c(\varepsilon) = 1$ dans l'intervalle $[\varepsilon_1, +\infty[$, on peut montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(\varepsilon) = \varphi_{\infty}^0(\varepsilon) \quad ; \quad \forall \varepsilon \in [\varepsilon_1, +\infty[\quad (A2-6)$$

Par ailleurs, les valeurs consécutives de $I_n(\varepsilon)$ sont telles que :

$$I_1(\varepsilon) \leq I_3(\varepsilon) \leq I_5(\varepsilon) \leq \dots \leq I_{2n+1}(\varepsilon) \leq I_{2n}(\varepsilon) \leq \dots \leq I_c(\varepsilon)$$

On voit donc que les $I_n(\varepsilon)$ oscillent autour de la valeur exacte avec des amplitudes d'autant plus faibles que leur rang n est plus grand. Il s'ensuit que l'on a évidemment tout intérêt à initier le processus itératif, non pas de $I_c(\varepsilon) = 1$, mais d'une valeur la plus proche possible de la solution exacte.

Ainsi, dans tous les calculs, je prendrai comme fonction initiale du processus itératif, l'une des solutions asymptotiques étudiées précédemment.

D'un point de vue pratique, les difficultés numériques interviennent dans le calcul de l'opérateur $K_{\varepsilon_1} \left(\frac{I_{n-1}(\eta)}{I_{n-1}(\gamma)} \right)$. Elles sont de trois ordres :

1-évaluation de la fonction $I_{n-1}(\varepsilon)$ en un point quelconque de l'intervalle $[\varepsilon_1, +\infty[$ avec une erreur tolérable imposée ;

2 - estimation de l'intégrale double avec une précision choisie ;

3 - extrapolation de la fonction de distribution.

La condition un est en général associée à l'intégration des équations du type VOLTERRA par la méthode de NEUMANN. Elle est délicate à satisfaire par suite de la structure de l'opérateur K_{ε_1} qui impose la connaissance d'un plus grand nombre de valeurs de $I_{n-1}(\varepsilon)$ que celles données par l'équation. Dans le cas présent, on interpole dans la table $I_n(\varepsilon)$ au moyen du polynôme d'interpolation de NEWTON (ascendant ou descendant). Le choix de ce type d'interpolation est ici particulièrement bien adapté par suite du comportement exponentiel décroissant de $I_n(\varepsilon)$: les différences successives décroissent de façon monotone ce qui garantit la convergence du processus. En pratique, on se limite à un polynôme de degré six. Les valeurs interpolées s'obtiennent alors avec environ six à sept chiffres exacts.

APPENDICE 11 - 2

RESOLUTION NUMERIQUE DE L'EQUATION (47) (OU (71))

De nombreux travaux ont été consacrés depuis quelques années à ce problème, toutefois les méthodes proposées ne sont pas toutes d'égale valeur. La plupart ne reposent d'ailleurs sur aucune considération mathématique sérieuse. Le travail le plus rigoureux dans ce domaine semble être celui de SHERMAN (Sh-1) qui constituait le support théorique des calculs de FROST et PHELPS (Fr-1).

Dans son étude, SHERMAN ne travaillait pas exactement sur (43) mais sur une forme déduite de celle-ci en traitant sur un même plan d'égalité les termes de population et de dépopulation des opérateurs de collision inélastique. Sous sa forme intégrodifférentielle, cette équation s'écrit :

$$\frac{d\varphi_{\infty}^v}{d\varepsilon} + b(\varepsilon) \varphi_{\infty}^v = - \sum_j \frac{3 N_c^2 \sigma_T}{E^2 \varepsilon} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon + \varepsilon_j} \eta \sigma_{sj,0}(\eta) \varphi_{\infty}^v(\eta) d\eta \quad (A2-1)$$

SHERMAN a ainsi montré l'existence et l'unicité de la solution de (A2-1) compte tenu des conditions :

$$a - \varphi_{\infty}^v(\varepsilon) > 0 \quad ; \quad b - \int_0^{\infty} \varphi_{\infty}^v(\varepsilon) d\varepsilon = 1 \quad ; \quad c - \int_0^{\infty} \varepsilon \varphi_{\infty}^v(\varepsilon) d\varepsilon < \infty \quad (A2-2)$$

qui impliquent que φ_{∞}^v soit partout positive, normée et bornée. Il a ensuite proposé un schéma de résolution numérique basé sur l'étude itérative d'un opérateur intégral, déduit de (A2-1), et défini par :

$$K_{\varepsilon_1} [\Psi(\gamma, \eta)] = N_c^2 \sum_j \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon} \frac{3 \sigma_T}{E^2 \gamma} d\gamma \int_{\gamma}^{\gamma + \varepsilon_j} \eta \sigma_{sj,0}(\eta) \Psi(\gamma, \eta) d\eta \quad (A2-3)$$

Alors l'équation (A2-1) s'écrit, une fois intégrée, sous la forme :

$$\varphi_{\infty}^0(\varepsilon) = \varphi_{\infty}^0(\varepsilon_1) \exp \left[- \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon} b(\eta) d\eta - K_{\varepsilon_1} \left(\frac{\varphi_{\infty}^0(\eta)}{\varphi_{\infty}^0(\gamma)} \right) \right] \quad (A2-4)$$

Dans ces conditions, et si l'on définit, la formule de récurrence :

$$I_n(\varepsilon) = \exp \left[- \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon} b(\eta) d\eta - K_{\varepsilon_1} \left(\frac{I_{n-1}(\eta)}{I_{n-1}(\gamma)} \right) \right] \quad (A2-5)$$

avec $I_0(\varepsilon) = 1$ dans l'intervalle $[\varepsilon_1, +\infty[$, on peut montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(\varepsilon) = \varphi_{\infty}^0(\varepsilon) \quad ; \quad \forall \varepsilon \in [\varepsilon_1, +\infty[\quad (A2-6)$$

Par ailleurs, les valeurs consécutives de $I_n(\varepsilon)$ sont telles que :

$$I_1(\varepsilon) \leq I_3(\varepsilon) \leq I_5(\varepsilon) \leq \dots \leq I_{2n+1}(\varepsilon) \leq I_{2n}(\varepsilon) \leq \dots \leq I_0(\varepsilon)$$

On voit donc que les $I_n(\varepsilon)$ oscillent autour de la valeur exacte avec des amplitudes d'autant plus faibles que leur rang n est plus grand. Il s'ensuit que l'on a évidemment tout intérêt à initier le processus itératif, non pas de $I_0(\varepsilon) = 1$, mais d'une valeur la plus proche possible de la solution exacte.

Ainsi, dans tous les calculs, je prendrai comme fonction initiale du processus itératif, l'une des solutions asymptotiques étudiées précédemment.

D'un point de vue pratique, les difficultés numériques interviennent dans le calcul de l'opérateur $K_{\varepsilon_1} \left(\frac{I_{n-1}(\eta)}{I_{n-1}(\gamma)} \right)$. Elles sont de trois ordres :

1 - évaluation de la fonction $I_{n-1}(\varepsilon)$ en un point quelconque de l'intervalle $[\varepsilon_1, +\infty[$ avec une erreur tolérable imposée ;

2 - estimation de l'intégrale double avec une précision choisie ;

3 - extrapolation de la fonction de distribution.

La condition un est en général associée à l'intégration des équations du type VOLTERRA par la méthode de NEUMANN. Elle est délicate à satisfaire par suite de la structure de l'opérateur K_{ε_1} , qui impose la connaissance d'un plus grand nombre de valeurs de $I_{n-1}(\varepsilon)$ que celles données par l'équation. Dans le cas présent, on interpole dans la table $I_n(\varepsilon)$ au moyen du polynôme d'interpolation de NEWTON (ascendant ou descendant). Le choix de ce type d'interpolation est ici particulièrement bien adapté par suite du comportement exponentiel décroissant de $I_n(\varepsilon)$: les différences successives décroissent de façon monotone ce qui garantit la convergence du processus. En pratique, on se limite à un polynôme de degré six. Les valeurs interpolées s'obtiennent alors avec environ six à sept chiffres exacts.

La deuxième condition est en général plus aisée à satisfaire, Il suffit d'intégrer par une méthode du type ROMBERG-SIMPSON. La précision choisie est de cinq chiffres **exacts**.

La condition trois provient de ce que l'évaluation de $I_n(\varepsilon)$ nécessite la connaissance des valeurs de $I_n(\varepsilon)$ pour ε appartenant à l'intervalle $[\eta, \eta + \varepsilon_\delta]$. L'extrapolation est simplement réalisée ici si l'on remarque que pour η suffisamment grand $\log I_{n-1}(\eta)$ est linéaire.

TROISIEME PARTIE

ETUDE DE L'EQUATION DE BOLTZMANN DANS LE CAS
D'UN MILIEU HETEROGENE ET STATIONNAIRE

XXXX

Au cours de la deuxième partie de ce travail, j'ai abordé l'étude microscopique d'un gaz faiblement ionisé dans le cadre assez restrictif d'un milieu homogène. En effet, si l'hypothèse d'homogénéité peut souvent s'effectuer en particulier en géométrie parallèle et pour des valeurs assez faibles du rapport champ électrique sur pression par exemple, il n'en reste pas moins que l'étude d'un grand nombre de situations intéressantes des milieux faiblement ionisés demeurent interdites si l'on conserve ce point de vue : les régions proches de la cathode ou de l'anode dans une décharge de Townsend, les milieux à géométrie fortement hétérogène (fil-cylindre, pointe-plan, etc...), les décharges où règne une charge d'espace (streamer, diode plane, etc...) la zone de la chute cathodique dans une décharge lumineuse ou d'arc, nécessitent une étude plus précise capable de prendre en considération les propriétés d'hétérogénéité du milieu.

Quelques travaux ont été déjà effectués dans ce domaine, les principaux à ma connaissance étant ceux de PARKER (Pa-1), PARKER et LOWKE (Pa-2 et Pa-3) et de SOCKOL (So-1). Dans les références (Pa-1) à (Pa-3), il est fait systématiquement usage du développement en série d'harmoniques sphériques associé à l'hypothèse de la deuxième échelle des temps. Outre le problème de la validité de cette hypothèse, qui ne s'applique pas nécessairement au gradient dans l'espace des positions, un certain nombre de difficultés apparaissent dans l'étude des milieux hétérogènes par suite de l'existence de discontinuités dans l'espace des énergies et dans l'espace des angles, qui sont dues à l'influence des parois (analogie, avec le problème de MILNE de la neutronique) et à la présence d'électrons issus directement de la cathode conjointement avec des électrons provenant de l'espace interélectrode. Ces discontinuités interdisent l'adoption, dans le cas général, du développement en série d'harmoniques sphériques. En fait, comme on le montrera plus loin, on peut définir une certaine classe de conditions aux limites telles que ces discontinuités disparaissent : il devient alors possible d'utiliser les fonctions sphériques, du moins tant que le rapport champ électrique sur pression n'est pas trop élevé. En effet, pour les hautes valeurs de E/p , l'action du champ électrique l'emportant sur celle des collisions, il n'est évidemment plus possible d'adopter le développement en série de fonctions sphériques et la seule méthode d'attaque du problème semble être d'ordre numérique. Compte tenu de ce que mon intention est de limiter l'étude qui va suivre aux fortes valeurs de E/p , la détermination de la fonction de distribution sera effectuée par résolution numérique directe. D'autre part, et quoique le problème de la résolution de l'équation de Boltzmann dans un gaz faiblement ionisé soumis à un champ électrique uniforme et constant ait fait l'objet d'un nombre impressionnant de travaux, aucune méthode numérique directe de résolution semble n'avoir encore vu le jour. Ainsi, et bien que l'on ait affaire à des équations qui sont dans certains cas identiques, il n'existe pas en théorie cinétique des gaz faiblement ionisés l'équivalent des travaux réalisés en physique nucléaire au niveau de la résolution numérique des équations de transport. Il semble bien cependant que les méthodes classiques de la neutronique (méthode des ordonnées discrètes, méthode S_N ou DS_N) puissent s'adapter assez aisément à l'étude des milieux faiblement ionisés. L'un des buts de ce travail est d'effectuer cette adaptation.

Dans un premier temps, je préciserai la nature du problème physique abordé ainsi que les hypothèses effectuées. Ensuite, j'explicitai l'équation de Boltzmann le long des différentes directions caractéristiques définies par le mouvement libre des électrons entre deux collisions. On mettra alors en évidence l'existence d'un réseau unique valable quelle que soit l'intensité du champ électrique appliqué et l'énergie initiale des électrons à la cathode. Compte tenu des hypothèses adoptées, la structure de ce réseau, associé à une distribution en énergie des électrons à

la cathode à décroissance suffisamment rapide, permet de mettre en évidence l'existence (dans le plan défini par l'énergie cinétique et la position de l'électron dans l'espace interélectrode) d'une fonction de distribution présentant une succession de "bosses" et de "creux" caractéristiques de la présence des collisions inélastiques.

Ensuite, je proposerai le schéma aux différences qui approxime l'équation de Boltzmann et dont l'établissement est intimement lié à la structure du réseau de caractéristiques précédemment défini. Je démontrerai ensuite, la consistance, la convergence et la stabilité de ce schéma : ces résultats généralisent ceux obtenus en neutronique par KELLER (Ke-1) dans l'étude du mouvement des neutrons dans un milieu plan parallèle. Enfin, au cours du quatrième chapitre, je présenterai les résultats numériques obtenus.

CHAPITRE I

ETUDE DES DIRECTIONS CARACTERISTIQUES

XXXXX

1.1. HYPOTHESES ADOPTÉES.

Dans ce qui suit, je me propose de déterminer la fonction de distribution des vitesses des électrons qui se déplacent dans un milieu stationnaire soumis à un champ électrique constant et constitué par l'espace compris entre les électrodes d'une diode plane indéfinie. L'origine des distances est placée à la cathode supposée émissive (avec une distribution maxwellienne à une certaine température T_e^0), l'anode étant supposée parfaitement absorbante. Compte tenu de la symétrie de révolution engendrée par la géométrie très simple du milieu, il est suffisant de considérer le mouvement des électrons comme monodimensionnel, la fonction de distribution ne dépendant, au niveau spatial, que de l'abscisse z des électrons comptée à partir de la cathode.

Au cours de l'étude du milieu homogène, je m'étais restreint à un gaz de Lorentz imparfait avec collisions inélastiques de première espèce. Compte tenu du fait que les calculs qui vont suivre seront strictement limités à des valeurs de E/p suffisamment élevées, il est parfaitement justifié de négliger l'influence des échanges d'énergie au cours des collisions élastiques. Cela signifie que l'on se place dans le cadre de ce que l'on peut désigner par gaz de Lorentz parfait avec collisions inélastiques de première espèce. En outre, et par suite de l'absence d'informations suffisamment précises relativement aux sections efficaces différentielles d'excitation, on admet, quel que soit le type de collision, que l'électron est diffusé isotropiquement dans le système du centre de masse. Enfin, l'ionisation est traitée comme un simple processus d'excitation.

Ces hypothèses ont évidemment pour but de rendre les calculs plus simples et plus rapides mais (excepté peut être pour l'hypothèse relative à l'absence d'échanges d'énergie au cours des collisions élastiques), elles ne constituent en rien une restriction de la méthode.

Dans ces conditions, l'équation de Boltzmann vérifiée par la fonction $f(z, \varepsilon, \mu)$ s'écrit :

$$\mu \frac{\partial f}{\partial z} + E \left[\mu \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} + \frac{1-\mu^2}{2\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \mu} \right] = -N_0 \left\{ \varphi(\varepsilon) f + \frac{1}{2} \sigma(\varepsilon) \int_{-1}^{+1} f(z, \varepsilon, \mu') d\mu' + \frac{1}{2} \sum_j \sigma_{0,j}(\varepsilon + \varepsilon_j) \frac{\varepsilon + \varepsilon_j}{\varepsilon} \int_{-1}^{+1} f(z, \varepsilon + \varepsilon_j, \mu') d\mu' \right\} \quad (1)$$

avec

$$\sigma(\varepsilon) = \int \sigma_{0,0}(\varepsilon, \chi) d\Omega \quad ; \quad \varphi(\varepsilon) = \sigma(\varepsilon) + \sum_j \sigma_{0,j}(\varepsilon)$$

La section efficace $\sigma_{0,j}$ a été déjà définie au cours des première et deuxième parties. Dans l'équation (1) l'énergie cinétique est exprimée en électron volt, les longueurs $(z, (N_0 \sigma)^{-1}, \text{etc...})$ en centimètre, la pression en torr et le champ électrique en volt par centimètre.

La résolution de (1) nécessite la connaissance précise des conditions aux limites aux frontières du domaine considéré. Compte tenu des hypothèses effectuées précédemment, on a immédiatement :

$$f(z, \varepsilon, \mu)_{z=0, \mu>0} = A \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\kappa T_e}\right) = f^*(\varepsilon) \quad (2a)$$

$$\text{et } f(z, \varepsilon, \mu)_{z=L, \mu<0} = 0 \quad (2b)$$

Ici, L désigne la distance interélectrode ; A est une constante de normalisation que je ne préciserai pas pour l'instant et qui est définie en tenant compte du fait que la distribution à la cathode est semi-maxwellienne.

Les conditions (2) ci-dessus sont du type "conditions aux limites croisées" : on les rencontre couramment en neutronique, en théorie cinétique et, en règle générale, dans toute étude microscopique où il est indispensable de prendre en considération l'influence des parois. En outre, il sera nécessaire par la suite d'introduire un certain nombre d'autres conditions aux limites afin de pouvoir rendre compte du rebroussement dans l'espace interélectrode des électrons émis, à la suite d'une collision, dans la direction de la cathode. L'étude du réseau de caractéristiques que je vais effectuer maintenant permettra de mieux préciser la nature de ces conditions.

1.2. DEFINITION DU RESEAU DE CARACTERISTIQUES.

D'un point de vue mathématique, la notion de caractéristique s'introduit en théorie des équations aux dérivées partielles. Les lignes caractéristiques représentent des directions privilégiées le long desquelles les valeurs initiales de la fonction inconnue se propagent librement, sans

perturbation. Ainsi, si l'on annule le membre de droite de l'équation (1), on aboutit à une équation aux dérivées partielles du premier ordre qui traduit le fait que $f(z, \epsilon, \mu)$ est une constante le long de la trajectoire (ici une parabole) de la particule. Ce point est déjà apparu clairement dans la première partie au cours de l'établissement de l'équation de Boltzmann. Dans cette optique, les fonctions $\epsilon(z)$ et $\mu(z)$ exprimées le long de cette trajectoire définissent des lignes caractéristiques. On va voir que leur étude revêt une importance primordiale : non seulement elles fournissent une méthode d'approche de la résolution numérique de l'équation de Boltzmann (1) mais encore, et surtout, le simple examen de leur réseau permet de prévoir, avant toute résolution de (1) le comportement global de la fonction de distribution.

I.2.1. Définition de la première direction caractéristique $\epsilon(z)$.

Elle se définit simplement à partir du premier membre de (1) d'où l'on tire la relation :

$$\frac{dz}{\mu} = \frac{d\epsilon}{E\mu}$$

qui, après intégration conduit à :

$$\boxed{\epsilon - E z = w} \quad (3)$$

La constante w désigne l'énergie totale de l'électron. D'un point de vue physique la relation (3) traduit le fait que, au cours du mouvement libre, la particule chargée, soumise aux seules forces extérieures conserve une énergie totale constante. Ainsi, si l'on explicite l'équation de Boltzmann (1) dans l'espace engendré par la base $(Oz, Ow, O\mu)$ le membre de gauche de (1) prend la forme :

$$\mu \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{E(1-\mu^2)}{2(w+Ez)} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mu} \quad (4)$$

dans laquelle l'absence de gradient en énergie provient de la constance de la fonction de distribution entre deux collisions (cf. première partie). En l'absence de collisions on peut considérer que l'électron "se déplace" (*) le long de la droite définie de manière unique par l'énergie initiale d'émission de l'électron à la cathode (soit $\epsilon_0 = w$).

Si l'on se place dans la situation idéale du gaz de Lorentz parfait telle qu'aucune perte d'énergie n'ait lieu au cours des collisions, tout électron issu de la cathode "se déplacera" le long de la droite définie par (4) quelle que soit l'amplitude de la déviation après le choc.

(*) On adoptera cette terminologie qui, bien qu'à priori fâcheuse permet une plus grande simplification dans l'exposé. Evidemment, au lieu de dire l'électron se déplace le long de la droite définie par (3), il faudrait dire l'électron se déplace le long de la parabole du mouvement libre de telle manière que (3) soit vérifié.

Ainsi, seul un processus susceptible de modifier l'énergie totale de l'électron peut-il faire changer l'électron de sa "trajectoire" initiale définie par (4). Un tel processus sera désigné dans ce qui suit sous le nom de "processus externe" puisqu'il oblige la particule à quitter le plan initial du mouvement libre.

I.2.2. Définition de la deuxième direction caractéristique $\mu(z)$.

De la même manière qu'au paragraphe précédent on obtient, à partir du membre de gauche de (1) :

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{2\mu d\mu}{1-\mu^2}$$

soit après intégration :

$$\mu^2 \varepsilon = 1 - C \quad (5)$$

Posant $C = w - u$ et utilisant la relation (3), on a :

$$\mu(z, w, u) = \pm \left[\frac{u + Ez}{w + Ez} \right]^{1/2} \quad (6)$$

qui est le résultat cherché.

Dans (6), on peut remarquer que u représente l'énergie totale relative à la composante de la vitesse le long de la direction du champ électrique. Pour w et u fixés, la relation (6) caractérise la variation de μ au cours du mouvement libre en fonction de la distance depuis la cathode. Entre deux collisions, les électrons "se déplacent" le long d'une "trajectoire" définie par (6), u et w demeurant constants. A chaque collision, les paramètres u et w peuvent varier et la "trajectoire" être modifiée. Si w varie seul, on a affaire à un processus externe pur. De même, si c'est u seulement qui est modifié, c'est-à-dire si la collision s'effectue sans perte d'énergie, la particule change de "trajectoire" (6) tout en conservant son énergie totale constante : par analogie avec le cas où w varie, on désignera par "processus interne" la situation où u seul est modifié.

La représentation simultanée des "processus internes et externes" peut s'effectuer en choisissant un système d'axes cartésiens défini par $(Ox, Oz, O\mu)$. Dans un tel système, le "processus interne" s'effectue dans un plan perpendiculaire à (EOz) , passant par la droite définie par (3) et défini de manière unique par la valeur de w . A chaque variation de w correspond donc un nouveau plan parallèle au précédent et dans lequel se "déplacent" les électrons qui ne subissent aucune perte d'énergie.

Le long des "trajectoires" définies par (6), la fonction de distribution ne subit plus de redistribution angulaire et l'expression (4) prend la forme :

$$\mu(z, w, u) \frac{\partial f^{\pm}}{\partial z}(z, w, \mu) \quad (7)$$

Dans (7) il a été nécessaire d'affecter la fonction de distribution des signes plus et moins. En effet, celle-ci n'est plus bijective par rapport aux nouvelles variables z , w et u . La fonction $f^+(z, w, u)$ (resp. $f^-(z, w, u)$) est relative aux électrons dirigés vers l'avant (resp. vers l'arrière) ($\mu > 0$ (resp. $\mu < 0$)).

Dans la réalité, les "processus internes et externes" ne présentent pas une disjonction aussi nette que dans le cas présent et qui est due à l'hypothèse d'un gaz de Lorentz parfait. En général, la séparation est délicate à faire et cela d'autant plus que les particules en présence sont de masse voisine.

Dans ce qui suit, on va étudier en détail la structure particulière du réseau de caractéristiques induite par ces deux processus.

1.3. ETUDE DU PROCESSUS EXTERNE.

Sur la figure 1, ci-dessous, on a tracé pour plusieurs valeurs de w les droites représentatives de (3) et qui peuvent être plus généralement définies comme l'intersection du plan d'énergie totale constante et du plan (ϵOz) . Dans le quart de plan $Oz \geq 0$, $O\epsilon \geq 0$ de la figure 1 on peut définir deux zones distinctes qui jouent un rôle physique différent selon le signe de w .

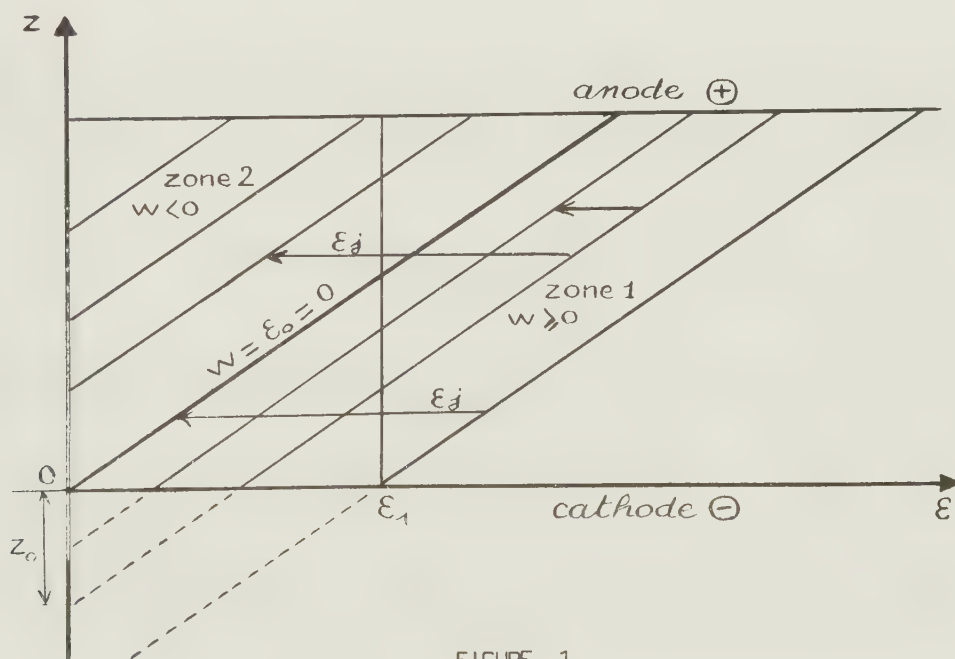


FIGURE 1

I.3.1. Zone I, $\omega \geq 0$.

L'équation (3) peut s'écrire :

$$z = \frac{\epsilon}{E} + z_0 \quad (8)$$

avec

$$z_0 = - \frac{\epsilon_0}{E} = - \frac{\omega}{E}$$

La grandeur z_0 désigne l'ordonnée du point d'intersection des droites définies par (8) avec l'axe Oz (figure 1). Dans la zone I où ω est plus grand ou égal à zéro, z_0 est négatif ou nul. La signification physique de la longueur z_0 est simple ; elle représente la distance fictive que devrait parcourir un électron initialement immobile pour émerger de la cathode ($z=0$) avec une énergie $\omega = \epsilon_0$. Il s'ensuit que tout électron émis par la cathode peut être considéré comme "lancé" dans l'espace interélectrode et posséder ainsi un excès d'énergie compte tenu du chemin qu'il parcourt dans cet espace : la zone I ne peut donc être peuplée que par des électrons issus de la cathode et qui n'ont pas été suffisamment freinés de manière à dissiper leur "capital" énergie initial. On voit en particulier maintenant que la zone I est la seule à être peuplée si l'on adopte strictement l'hypothèse du gaz de Lorentz parfait (sans collisions inélastiques) ; les électrons "se propagent" le long des droites définies par (8), le rôle des collisions se limitant à une simple redistribution angulaire à l'intérieur du plan d'énergie totale constante.

I.3.2. Zone II, $\omega < 0$.

Cette zone à l'inverse de la précédente correspond à des électrons présentant un "défaut" d'énergie : elle ne peut être peuplée (compte tenu des hypothèses collisionnelles adoptées) que par des électrons provenant de la zone I et qui ont été freinés dans celle-ci au cours des collisions inélastiques.

Tout électron situé dans la zone II ne peut plus revenir à la cathode : il rebrousse en annulant son énergie cinétique au point z_0 ($z_0 > 0$).

Notons que le peuplement de la zone I qui correspond à une transition discontinue de l'énergie de la particule s'effectue transversalement à l'axe $O\epsilon$ dans le diagramme de la figure 1.

Jusqu'à présent, j'ai considéré les plans d'énergie totale constante individuellement sans me préoccuper de la manière dont ils sont reliés entr'eux. On verra plus loin que la distribution électronique initiale à la cathode ainsi que l'importance et l'étalement des collisions inélastiques définissent entre les plans une structure particulière qui sera étudiée au cours du paragraphe I-5. Auparavant, on va examiner en détail la structure du processus interne.

1.4. ETUDE DU PROCESSUS INTERNE.

Pour tout w strictement positif, l'allure des caractéristiques (z, μ) dans le plan $v = \text{cste}$ est donnée compte tenu de (6) par la figure 2.



FIGURE 2

On peut voir immédiatement que tout électron émis dans le sens contraire du champ, en un point quelconque (z_e par exemple) de l'espace interélectrode, sous une incidence μ_e ($\mu_e < 0$) est repris par le champ électrique et, s'il ne percute pas la cathode auparavant, rebrousse au bout d'une distance Δz_e définie par la relation :

$$\Delta z_e = z_e \mu_e^2 \quad (9)$$

Le fait que l'électron rebrousse ou non est essentiellement conditionné par sa position, à l'émission, au-dessus ou au-dessous d'une certaine courbe définie par :

$$\mu^2(z, w, v)_{v=0} = \frac{Ez}{w + Ez} \quad (10)$$

et qui représente une situation limite où l'électron "frôle" la cathode lors du rebroussement. On peut ainsi définir trois régions délimitées par (10) et la frontière extérieure du diagramme de la figure 2.

1.4.1. La zone A, bornée par (10) et l'anode.

Tout électron créé en un point quelconque de A rebrousse avant de parvenir à la cathode. Dans cette zone ne figurent pas d'électrons provenant directement de la cathode : le peuplement s'effectue à travers le terme source de (1), soit par des électrons en provenance d'un plan affecté d'une valeur de w plus élevée, soit à l'intérieur du plan $w = \text{cste}$ par suite de la redistribution angulaire caractéristique du processus interne (et qui s'effectue parallèlement à l'axe

0μ , selon le sens des flèches représentées sur la figure 2).

I.4.2. La zone B, bornée par (10) et les axes $z=0$, $\mu=-1$.

Tout électron créé en un point quelconque de B rencontre la cathode avant de rebrousser. Comme précédemment, cette zone ne peut être peuplée qu'au moyen du terme source de (1). La frontière $\mu=-1$ correspond aux électrons se déplaçant le long de l'axe du champ électrique : leur trajectoire est rectiligne.

I.4.3. La zone C, bornée par (10) et les axes $z=0$ et $\mu=1$.

Dans cette zone, le long des courbes (6), "se propagent" des électrons en provenance directe de la cathode. En l'absence des collisions, c'est la seule zone qui soit peuplée. Comme pour A ou B, d'autres électrons peuvent pénétrer dans C en provenance de plans d'énergie totale plus élevée.

Dans C, la courbe définie par (10) joue un rôle fondamental en ce sens qu'elle sépare deux zones (A et C) où la fonction de distribution est discontinue. Cette discontinuité est maximale en l'absence de collisions puisque A et B sont vides, elle s'atténue au fur et à mesure que l'influence des collisions augmente et elle peut même être éliminée sous réserve de conditions aux limites judicieusement choisies. La présence de cette discontinuité conditionne de manière impérieuse la méthode de résolution de (1) : on reprendra son étude dans un paragraphe ultérieur.

L'allure des caractéristiques (z, μ) correspondant à la zone II ($\omega < 0$) est donnée par la figure 3. On remarque que seule la caractéristique définie par $\mu^2 = 1$ passe en $z = z_0$, point d'énergie cinétique nulle. Les caractéristiques correspondant à $z \neq z_0$, $\mu^2 \neq 1$ tendent asymptotiquement vers cette courbe limite.

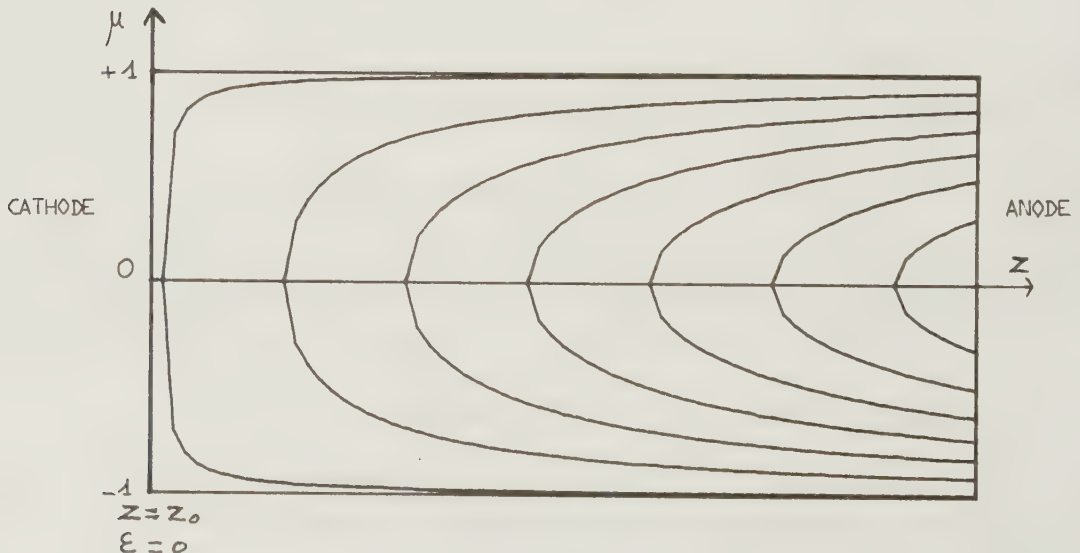


FIGURE 3

Par suite de l'uniformité et de la constance du champ électrique appliqué, il est bien évident que, au cours de leur mouvement libre, les électrons émis avec la même vitesse initiale en des points quelconques de l'espace interélectrode, parcourent des trajectoires identiques. Cela suggère l'existence, dans l'espace des phases d'un réseau unique des caractéristiques définies par (6) et dont les figures 2 et 3 ne représentent en fait qu'une partie. Pour mettre ce point en évidence il suffit d'effectuer dans (6) le changement de variable :

$$z = z_0 + x$$

On obtient immédiatement :

$$\mu^2(z, z^*) = 1 - \frac{z^* - z_0}{z - z_0} \quad (11)$$

où z^* (défini par $U = -Ez^*$) désigne l'abscisse du point d'intersection des courbes définies par (6) avec l'axe des z (c'est-à-dire le point où μ s'annule).

La relation (11) ci-dessus met clairement en évidence les deux propriétés fondamentales suivantes :

- le réseau des courbes (z, μ) ne dépend pas de l'intensité du champ électrique appliqué ;
- il est également indépendant de l'énergie totale de la particule considérée.

La figure 4 représente ce réseau.

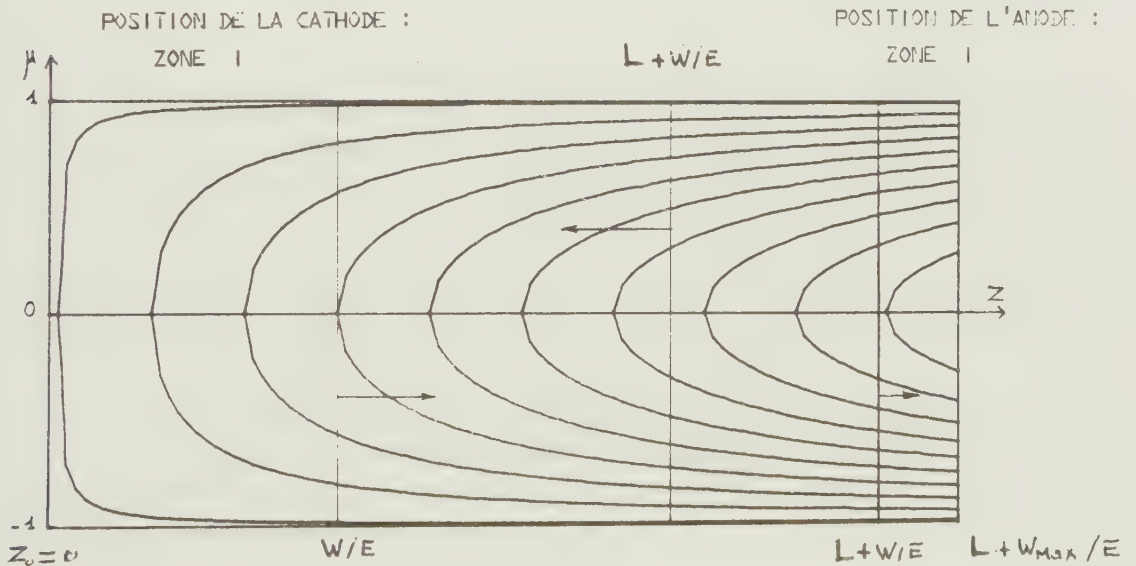


FIGURE 4

Pour des raisons de commodité le point d'énergie cinétique nulle a été pris comme origine des coordonnées ($z_0 = 0$). Dans ces conditions, le réseau de la figure 2 correspond, sur la figure 4, au domaine borné par les droites W/E et $L+W/E$ qui représentent respectivement la cathode et l'anode et qui se déplacent dans le réseau général selon les valeurs du champ ou de l'énergie totale.

Une augmentation du champ (ou inversement une diminution de ω) provoque un décalage de l'ensemble cathode-anode vers l'origine des coordonnées. De même, une diminution du champ (ou une augmentation de ω) implique un déplacement cathode-anode vers les hautes valeurs de z . Cette influence parallèle et antagoniste de l'énergie totale et du champ joue, comme on le verra plus loin, un rôle fondamental à tous les niveaux de l'étude du milieu hétérogène.

La droite $L + \omega/E$ de la figure 4 peut également représenter la position de l'anode dans la zone II. Tout se passe, au fur et à mesure de la croissance de l'intensité absolue de ω , comme si l'anode se rapprochait de l'origine des coordonnées comme c'est le cas de la figure 3.

On voit donc que l'ensemble des caractéristiques (z, μ) constitue une seule famille, indépendante du champ électrique appliqué et de l'énergie totale ω choisie : le sous-ensemble lié à un ω et un E donnés se définit simplement comme une partie de l'ensemble précédent, bornée par la cathode et l'anode. Ce résultat est une conséquence de la définition du réseau à l'aide de (3) et (11). On voit cependant qu'il correspond à des propriétés physiques précises.

Il convient enfin de remarquer que l'indépendance des caractéristiques (z, μ) vis à vis du champ est liée à la linéarité du potentiel utilisé. Dans le cas où le potentiel appliqué n'est plus linéaire, cette propriété ne peut plus être garantie. On a au plus la relation :

$$\mu^2 = 1 - \frac{\varphi(z^*) - \varphi(z_0)}{\varphi(z) - \varphi(z_0)} \quad (12)$$

où φ désigne le potentiel des forces extérieures appliquées.

1.5. TOPOLOGIE DU PROCESSUS EXTERNE.

Supposons que les électrons soient émis de la cathode selon une distribution maxwellienne. Les températures d'émission habituelles des cathodes chaudes sont telles que la distribution en énergie décroît très rapidement et que l'on peut considérer que plus aucun électron n'est émis au-dessus d'une énergie assez peu élevée. Pour fixer les idées, prenons cette énergie maximale égale à 5 eV. Cela signifie que dans la zone I, les électrons se déplacent seulement dans une "bande" de 5 eV de large située entre les caractéristiques définies par $\omega=0$ et $\omega_1=5$ eV (figure 5). Dans cette bande se trouvent les électrons émis directement de la cathode et dont le nombre diminue en fonction de leur éloignement de celle-ci. Des électrons disparaissent de cette bande sous l'effet des collisions inélastiques. Les électrons qui se déplacent avec une énergie totale égale à ω_1 , engendrent dans la zone II des électrons dont l'énergie totale maximale est égale à $\omega_2 = \omega_1 - \epsilon_1$, où ϵ_1 est le premier niveau d'excitation du gaz considéré. De la même manière les électrons situés sur ω_0 engendrent dans la zone II des électrons dont l'énergie totale minimale est égale à $\omega_3 = \omega_0 - \epsilon_i$, où ϵ_i est le dernier niveau d'excitation considéré (en général le niveau d'ionisation). Les caractéristiques ω_2 et ω_3 définissent ainsi une nouvelle bande dans laquelle se déplacent des électrons d'énergie totale négative. La bande 2 est plus large que la première. En effet :

$$\omega_2 - \omega_3 = \omega_1 - \omega_0 + \epsilon_i - \epsilon_1$$

l'augmentation de largeur correspond à l'écart énergétique entre le premier et le dernier niveau d'excitation.

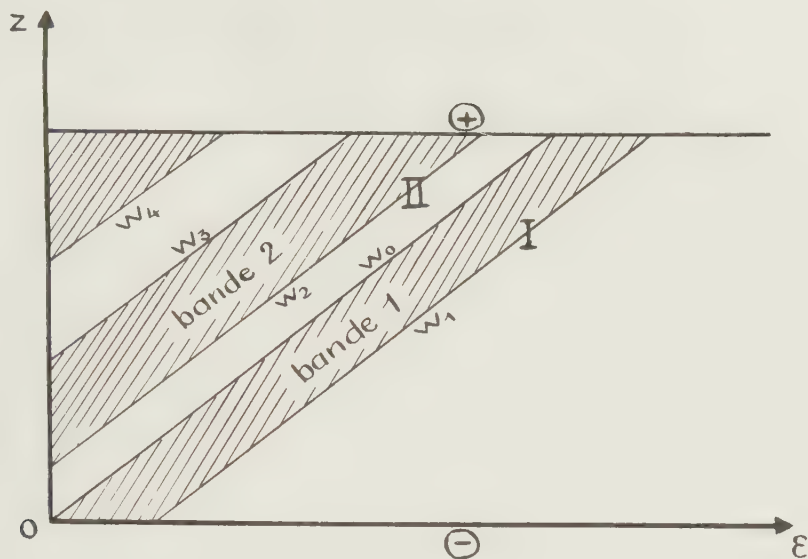


FIGURE 5

On peut définir de même une bande 3 de largeur :

$$w_4 - w_3 = w_1 - w_0 + 2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$$

engendrée par la bande 2 et ainsi de suite. Comme la fonction de distribution n'est pas rigoureusement nulle au-dessus de w_1 , la bande comprise entre w_0 et w_2 n'est pas totalement vide, mais elle est bien moins peuplée que les bandes 1 et 2. Par suite, à une distance z donnée, la fonction de distribution va présenter une succession de "bosses" et de "creux" résultant de la propagation des électrons le long des caractéristiques et du freinage de ces électrons au cours des collisions. Cette situation est typique d'un état hors d'équilibre et, au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la cathode (si la distance interélectrode est suffisamment grande), la fonction de distribution doit croître dans les bandes de faible énergie, au détriment des bandes d'énergie élevée. A partir d'une certaine distance les différentes bandes se recourent et on doit tendre vers la situation classique de l'état homogène, à savoir une distribution énergétique monotone et décroissante.

L'existence de cette structure de bande a déjà été signalée dans la littérature par COOKSON et LEWIS (Co-1) de manière qualitative et elle était invoquée par ces auteurs pour justifier l'aspect oscillant des coefficients d'ionisation obtenus expérimentalement par CHANIN et RORK (Ch-1). Aucun travail théorique n'a, à ma connaissance, été consacré à ce problème jusqu'à maintenant.

CHAPITRE II

ETABLISSEMENT DU SCHEMA NUMERIQUE

XXXXX

1.1. POSITION DU PROBLEME, CONDITIONS AUX LIMITES.

Les conditions aux limites (2) définies précédemment doivent être adaptées maintenant à l'existence des différentes zones. Par ailleurs, compte tenu des changements de variables effectués au paragraphe précédent, il est indispensable d'explicitier l'équation de Boltzmann dans l'espace engendré par la base Oz, Ow, Ou , ou mieux, étant donné la relation liant la variable u à z^* , dans l'espace engendré par Oz, Ow, Oz^* . Alors il vient respectivement (on a posé pour simplifier $f^\pm(z, w, z^*) = f^\pm(z, z^*)$):

- Zone I :

$$f^+(z, z^*)_{z=0} = A \exp\left(-\frac{w}{kT_e^0}\right) = f^*(w) \quad (13a)$$

$$f^-(z, z^*)_{z=L} = 0 \quad (13b)$$

$$f^+(z, z^*)_{z=z^*} = f^-(z, z^*)_{z=z^*} \quad (13c)$$

La condition (13c) traduit la continuité de la fonction de distribution au point de rebroussement ($\mu=0$) de la trajectoire de l'électron.

- Zone II :

$$f^+(z, z^*)_{z=z^*} = f^-(z, z^*)_{z=z^*} \quad (14a)$$

$$f^-(z, z^*)_{z=z^*} = 0 \quad (14b)$$

Dans la zone II ne pénètrent que les électrons qui ont perdu de l'énergie au cours des collisions inélastiques. Si l'on considère les valeurs de w strictement négatives, nous avons vu qu'aucun électron ne peut revenir à la cathode puisque son énergie cinétique s'annule au point z_0 défini par :

$$z_0 = -\frac{W}{E}$$

En ce point, n'existent que des électrons dont le vecteur vitesse est parallèle ou antiparallèle au champ électrique. Ainsi tout électron tel que $|\mu| \neq 1$ ne peut atteindre le point z_0 d'énergie cinétique nulle et rebrousse auparavant. La relation (14a) traduit cet état de fait.

La condition (14b) est l'homologue de 13b dans la zone I. L'étude générale du problème défini par les relations (1), (13) et (14) n'a encore jamais été abordée à ma connaissance dans la littérature. Bien que les milieux hétérogènes aient fait l'objet d'un certain nombre de travaux, seules des études partielles semblent avoir été entreprises. Comme je l'ai déjà dit plus haut, le premier travail dans ce domaine est celui de PARKER et LOWKE (Pa-1 à Pa-3), (Lo-4) dans lequel l'étude des milieux hétérogènes est abordée au moyen du classique développement en série de fonctions sphériques, limité aux deux premiers termes. Dans cette série de trois articles, les auteurs étudient l'évolution spatiale puis spatio-temporelle d'un paquet d'électrons issus d'un point source. Leurs calculs les conduisent à la détermination des rapports D_T/μ_0 et D_L/μ_0 (D_T et D_L : coefficients de diffusion transverse et longitudinal, μ_0 : mobilité) dont les seules valeurs qui existaient jusqu'alors dans la littérature étaient de nature expérimentale. Leurs résultats semblent en assez bon accord avec l'expérience.

Dans un rapport N. A. S. A., SOCKOL (So-1) s'intéresse au problème du mouvement des électrons dans un gaz dilué en présence de charge d'espace. Il adopte l'hypothèse du gaz de Lorentz parfait. Explicitant l'équation de Boltzmann le long des directions caractéristiques qui ont été définies au chapitre précédent, SOCKOL obtient une équation intégrale de FREDHOLM de deuxième espèce qu'il résout numériquement. Cette méthode semble bien plus adaptée à l'étude des milieux hétérogènes que celle de PARKER et LOWKE sauf peut être aux faibles valeurs du rapport E/P .

Il existe dans la littérature d'autres travaux relatifs à l'étude des milieux hétérogènes mais dans des situations beaucoup plus simples que celles décrites ci-dessus. Ainsi, dans les articles de STAKHANOV (St-1) et STAKHANOV et SHCHERBININ (St-2), (St-3), il n'est pas tenu compte du champ électrique. L'équation se ramène exactement à celle de la neutronique dans le cas d'un seul groupe de vitesse.

LUCAS (Lu-1), étudie l'évolution spatio-temporelle d'une distribution électronique mais en effectuant un certain nombre d'hypothèses simplificatrices visant à découpler la densité électronique de la fonction de distribution en énergie.

Pour l'instant, et compte tenu des fortes valeurs de E/p adoptées dans ce travail, c'est la méthode de SOCKOL qui semble la mieux adaptée à notre propos. Toutefois, bien que l'obtention d'une forme intégrale de l'équation de Boltzmann soit très intéressante d'un point de vue théorique, l'existence d'un noyau à singularité logarithmique introduit des difficultés certaines au niveau de la résolution numérique.

Par contre, ces difficultés disparaissent si l'on adopte comme technique de résolution une méthode dérivée de la S_N méthode, couramment employée en neutronique, et qui fut proposée pour la première fois en 1957 par CARLSON (Ca-2) dans l'étude du ralentissement des neutrons. L'idée principale de la S_N méthode est de considérer l'équation (1), comme une simple équation aux dérivées partielles en supposant connu le terme source. Dans ces conditions, l'équation (1) se résout simplement en utilisant les techniques classiques de discrétisation. La fonction de distribution ainsi obtenue permet de calculer un nouveau terme source qui, de nouveau porté dans (1), conduit à une nouvelle résolution, donc à un nouveau terme source, etc... Ce procédé itératif est rendu indispensable dans toute étude où interviennent les conditions aux limites du type "croisé" (13), tant que l'on ne modifie pas la structure de l'équation (1). En effet, il est possible de ramener l'étude de (1), qui est une équation linéaire, associée aux conditions (13) et (14) à l'étude d'une équation non linéaire mais satisfaisant à un problème de CAUCHY. Cette technique porte en neutronique le nom de "plongement invariant" et elle a été, jusqu'à présent, essentiellement appliquée au transport des neutrons en géométrie plane. D'un point de vue numérique, le système d'équations non linéaires (du type RICATTI) est en général résolu par une méthode de RUNGE-KUTTA (Wi-4). L'adaptation du plongement invariant à l'équation (1) semble pour l'instant assez délicat et fera vraisemblablement l'objet d'un travail ultérieur.

La deuxième idée fondamentale de la S_N méthode est basée sur les propriétés des caractéristiques qui ont été étudiées plus haut. Les schémas de discrétisation sont en général construits de telle façon que le point où la fonction de distribution est calculée, aux mailles d'une cellule du réseau, soit le plus près possible d'une caractéristique. Au fur et à mesure de l'évolution de la S_N méthode, un certain nombre de propriétés sont venues s'ajouter au schéma primitif. de manière à mieux rendre compte de la structure de l'équation initiale. C'est ainsi que certains schémas conservent le nombre de particules mais ne sont pas positifs (c'est-à-dire peuvent conduire à des solutions négatives), d'autres sont positifs mais non conservatifs, etc... Comme c'est l'étude des schémas de la neutronique qui m'a conduit à la méthode de résolution que je vais définir plus loin, il me paraît utile d'effectuer une rapide bibliographie des principaux travaux dans ce domaine. Toutefois, comme cette étude sort du cadre de cet exposé, elle a été placée en Appendice.

Un trait commun aux schémas de la neutronique réside dans la définition d'un maillage rectangulaire, la fonction de distribution étant explicitée aux noeuds de ce maillage. Toutefois, l'existence d'un tel maillage interdit de "suivre" exactement les caractéristiques même si l'on se place toujours le plus près possible de celles-ci. En outre, un autre problème se présente dans notre cas, par suite de l'émission électronique à la cathode et qui consiste en la présence de la discontinuité de la fonction de distribution à la frontière des zones A et C de la figure 2. Il est évident que les noeuds d'un quadrillage rectangulaire se situeront en général de part et d'autre de cette frontière et qu'il ne sera pas possible de tenir compte de la discontinuité avec un maillage de ce type. L'intérêt du maillage rectangulaire tient en ce que la définition des indices est simple et que le nombre de points de discrétisation est constant. Si l'on ne se préoccupe pas de conserver un nombre de points constants, et si, en revanche, l'on veut respecter la discontinuité il est naturel de prendre le réseau des caractéristiques comme support de deux côtés du maillage, les deux autres côtés étant constitués par les perpendiculaires à l'axe des z issues des points de discrétisation Z_i .

Les figures 6 et 7 représentent ce maillage respectivement dans les zones I et II. Quel que soit le mode de discrétisation choisi pour représenter (1) le long de ce maillage il est bon de noter que, le premier membre de (1) se réduisant à une différentielle totale, l'approximation ne porte que sur un seul terme de (1).

Deux inconvénients semblent liés au maillage ci-dessus :

1 - Les ensembles discrets $\{\mu_i\}$ sont en général disjoints selon les valeurs successives des abscisses z_i . On verra plus loin comment éliminer cette difficulté.

2 - Dans la zone II, au point z_0 , le maillage ne comporte que deux points en μ , en $z_0 + \Delta z$ trois points, puis cinq, sept, etc... On peut se poser la question de savoir si l'intégration du terme source est assez précise dans cette zone compte tenu de ce petit nombre de points. En fait, la condition aux limites (14a) entraîne la constance de la fonction de distribution au point z_0 d'énergie cinétique nulle. Ce point se trouve à l'extrémité d'une trajectoire qui a dégénéré en deux parties linéaires. Toute courbe dont le sommet se situe dans un voisinage de z_0 tend asymptotiquement vers cette situation. Dans ces conditions, à une grande variation de μ correspond une faible variation de z . Sur la figure 7 on voit clairement le comportement des caractéristiques proches de z_0 qui sont quasiment asymptotes à l'axe $O\mu$. Comme, en l'absence de collisions, la fonction de distribution est constante le long des courbes de la figure 7 et comme la variation de z est négligeable au voisinage de z_0 si l'on se déplace le long des caractéristiques, il en résulte que la fonction de distribution varie très peu même en présence de collisions. Le faible nombre de points exigé au voisinage de z_0 par le maillage que nous adoptons ne constitue donc pas une restriction à la méthode: c'est une conséquence naturelle du comportement des électrons au voisinage du point d'énergie cinétique nulle.

Il est bon de remarquer, enfin, avant d'aborder l'étude du premier schéma de discrétisation que l'écriture de l'équation (1), associée aux conditions (13) ou (14), sous la forme d'une équation intégrale de FREDHOLM de deuxième espèce à noyau de carré sommable permet d'affirmer (Tr-1) l'existence et l'unicité de la solution du problème.

11.2. PREMIER SCHEMA DE DISCRETISATION.

L'équation (1) explicitée le long des caractéristiques prend la forme :

$$\begin{aligned} \mu(z, z^*) \frac{df^\pm(z, w, z^*)}{dz} = & -N_0 \left[\sigma_T(z, w) f^\pm(z, w, z^*) \right. \\ & + \frac{1}{2} \sigma(z, w) S(z, w) \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_j \sigma_{0,j}(z, w + \varepsilon_j) \frac{Ez + w + \varepsilon_j}{Ez} S(z, w + \varepsilon_j) \right] \end{aligned} \quad (16)$$

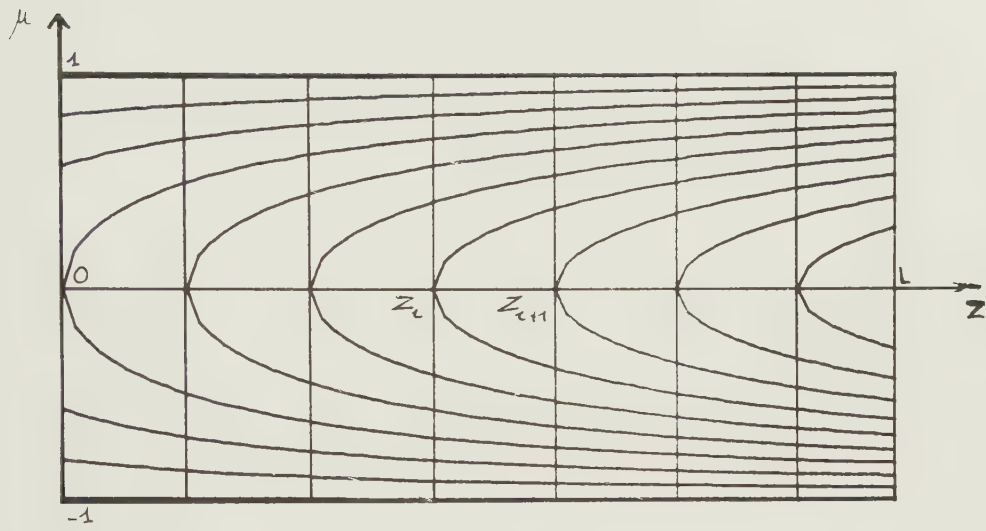


FIGURE 6

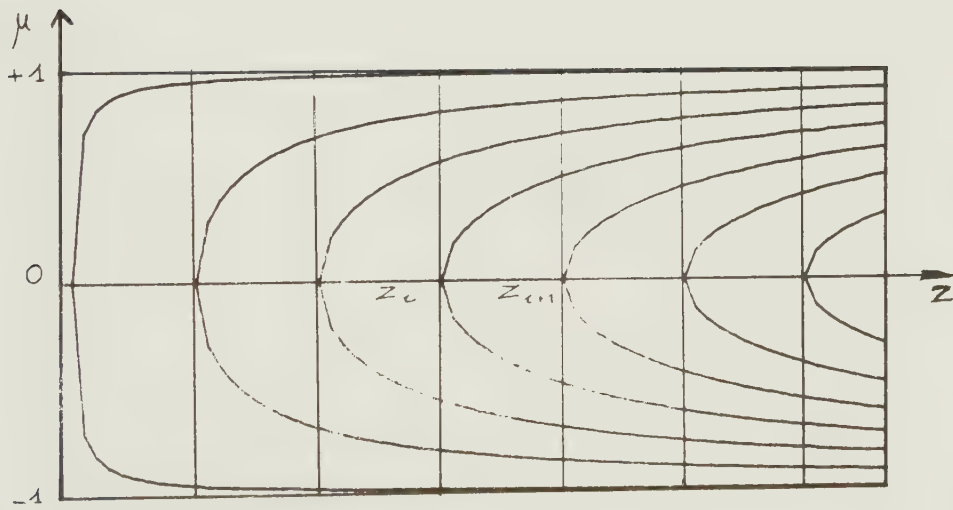


FIGURE 7

avec :

$$\mu(z, z^*) = \pm \tilde{\mu}(z, z^*) = \left(1 - \frac{z^* - z_0}{z - z_0}\right)^{1/2} \quad (16a)$$

$$S(z, w) = \int_0^1 \left\{ f^+[z, \tilde{\mu}'(z, z^*), w] + f^-[z, \tilde{\mu}'(z, z^*), w] \right\} d\tilde{\mu}'(z, z^*) \quad (16b)$$

$$S(z, w + \varepsilon_j) = \int_0^1 \left\{ f^+[z, \tilde{\mu}'(z, z^*), w + \varepsilon_j] + f^-[z, \tilde{\mu}'(z, z^*), w + \varepsilon_j] \right\} d\mu'(z, z^*) \quad (16c)$$

Dans tout ce qui suit on ne fera intervenir la dépendance fonctionnelle avec w des différentes fonctions définies ci-dessus que lorsque ce sera nécessaire (terme source des collisions inélastiques). Alors, si l'on considère comme connus les termes sources $S(z)$ et $S(z, w + \varepsilon_j)$ l'équation (16) est une simple équation différentielle du premier ordre à coefficients variables qui, compte tenu des conditions aux limites (13) et (14), s'intègre formellement. Il vient :

- Cas $\mu < 0$:

$$a - \mu < 0, z \in [0, L]$$

$$f^-(z, z^*) = -\frac{1}{2} \left[\int_z^L \frac{\sigma(\gamma)}{\sigma_T(\gamma)} S(\gamma) \frac{d}{d\gamma} \alpha(\gamma, z, z^*) d\gamma + \sum_j \int_z^L \frac{\sigma_{0,j}(\gamma)}{\sigma_T(\gamma)} \frac{Ez + w_j}{Ez} S(\gamma, w_j) \frac{d}{d\gamma} \alpha(\gamma, z, z^*) d\gamma \right] \quad (17a)$$

on a posé :

$$w_j = w + \varepsilon_j \quad (17a)$$

et :

$$\alpha(\gamma, z, z^*) = \exp \left[-N_0 \int_z^\gamma \frac{\sigma(\eta)}{\mu(\eta, z^*)} d\eta \right] \quad (17b)$$

$$\mu > 0$$

$$b. 1. z^* \in [0, L], z \in [z^*, L]$$

$$f^+(z, z^*) = f^-(z^*, z^*) \alpha(z, z^*, z^*)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{z^*}^z \frac{\sigma(\gamma)}{\sigma_T(\gamma)} S(\gamma) \frac{d}{d\gamma} \alpha(z, \gamma, z^*) d\gamma \quad (18)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_j \int_{z^*}^z \frac{\sigma_{0,j}(\gamma)}{\sigma_T(\gamma)} \frac{E\gamma + w_j}{E\gamma} S(\gamma, w_j) \frac{d}{d\gamma} \alpha(z, \gamma, z^*) d\gamma$$

$$b - 2. z^* \leq 0, z \in [0, L]$$

$$f^+(z, z^*) = f^+(0, z^*) \alpha(z, 0, z^*)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^z \frac{\sigma(y)}{\sigma_T(y)} S(y) \frac{d}{dy} \alpha(z, y, z^*) dy \quad (19)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_j \int_0^z \frac{\sigma_{0,j}(y)}{\sigma_T(y)} \frac{E y + w_j}{E y} S(y, w_j) \frac{d}{dy} \alpha(z, y, z^*) dy$$

- Zone II :

$$b - \mu \leq 0, z \in [z_0, L]$$

Expression identique à la relation (17).

$$b - \mu > 0, z \in [z_0, L]$$

Expression identique à la relation (18).

L'expression $\alpha(y, z, z^*)$ représente la probabilité qu'une collision ait lieu au bout d'une distance $y-z$. Dans ces conditions, les relations (17), (18) et (19) montrent que la fonction de distribution en un point quelconque de l'espace interélectrode (et plus généralement de l'espace des phases) est égale essentiellement à la somme de trois termes. Le premier est un terme d'amortissement qui caractérise la probabilité qu'à l'électron initial d'atteindre le point considéré compte tenu des collisions élastiques ou inélastiques. Le deuxième terme (fonction de $S(z)$) rend compte de la redistribution angulaire et de l'arrivée au point (z, μ) considéré d'électrons issus d'horizons angulaires différents sous l'influence des seules collisions élastiques. Le troisième terme joue un rôle similaire mais au niveau des collisions inélastiques. La fonction de distribution est donc caractérisée de manière unique par l'importance relative de l'apparition ou de la disparition des particules le long des trajectoires définies plus haut.

Lorsqu'on fait $z^* = 0$ dans (18) et (19) ces relations, bien qu'alors exprimées le long de la même caractéristique, ne conduisent pas aux mêmes résultats. Cela est dû à la présence de la discontinuité déjà mentionnée. On peut, si cela s'avère nécessaire, éliminer cette discontinuité moyennant l'adoption de nouvelles conditions aux limites que je me propose avant d'aller plus loin de déterminer.

Pour cela remplaçons la condition (13c) par une condition plus large :

$$\mu \geq 0; f^+(0, z^*) = \mathcal{E}^+(z^*) + \mathcal{R}^+(z^*) f^-(0, z^*) \quad (13'c)$$

où $\mathcal{E}^+(z^*)$ est une fonction de distribution angulaire à l'émission et $\mathcal{R}^+(z^*)$ un coefficient de réflexion dépendant de l'angle d'émission. La relation (19) devient :

$$z^* \leq 0, z \in [0, L]$$

$$f^+(z, z^*) = \left[\mathcal{E}^+(z^*) + \mathcal{R}^+(z^*) f^-(0, z^*) \right] \alpha(z, 0, z^*) + \frac{1}{2} \int_0^z \frac{\sigma(y)}{\sigma_T(y)} S(y) \frac{d}{dy} \alpha(z, y, z^*) dy \\ + \frac{1}{2} \sum_j \int_0^z \frac{\sigma_{0,j}(y)}{\sigma_T(y)} \frac{E y + w_j}{E y} S(y, w_j) \frac{d}{dy} \alpha(z, y, z^*) dy \quad (20)$$

Imposons alors la continuité de la fonction de distribution au point $(z=0, \mu=0)$ en écrivant :

$$\lim_{\mu(z, z^*) \rightarrow 0^-} f^+(z, z^*) \Big|_{z=0} = \lim_{\mu(z, z^*) \rightarrow 0^+} f^+(z, z^*) \Big|_{z=0}$$

Alors :

$$\lim_{\mu(z, z^*) \rightarrow 0^-} [G^+(z^*) + R^+(z^*) f^-(0, z^*)] = \lim_{\mu(z, z^*) \rightarrow 0^+} f^-(0, z^*)$$

et ceci quelle que soit la valeur de la fonction de distribution. On en tire une condition nécessaire et suffisante de continuité :

$$a - \lim_{z^* \rightarrow 0} G^+(z^*) = 0 \quad b - \lim_{z^* \rightarrow 0} R^+(z^*) = 1 \quad (21)$$

Il faut donc que simultanément la caractéristique d'émission de la cathode s'annule dans la direction parallèle aux électrodes et que le coefficient de réflexion tende vers un lorsque l'on se rapproche de l'incidence rasante.

Dans la suite de ce travail, on traitera le cas général que la discontinuité soit présente ou non. Compte tenu du maillage utilisé, il apparaît que le choix d'un ensemble z_i définit de manière biunivoque l'ensemble des μ_e . En effet dans le demi-plan $\mu > 0$, la relation :

$$z_e^* \rightarrow \left[1 - \left(\frac{z_e^* - z_0}{z_i - z_0} \right)^{1/2} \right] = \mu_e(z_i) \quad , z_i \in [z_e^*, L] \quad , z_e^* \in]z_0, L] \quad (22)$$

fait correspondre à un point de l'intervalle $]z_0, L]$ un point de l'intervalle $[0, 1]$ et un seul, les valeurs de μ négatives étant définies par symétrie. Le point $z = z_0$ a été exclu de l'intervalle de définition de z puisque la relation (22) dégénère alors en :

$$z_e^* = z_0 \rightarrow 1 = \mu_0(z_i) \quad , z_i \in [z_0, L] \quad (23)$$

et qu'il n'y a pas transition continue de (22) à (23). Si l'on pose maintenant :

$$\Delta z_e^* = z_e^* - z_{e-1}^*$$

et

$$\Delta \mu_e(z_i) = \mu_e(z_i) - \mu_{e-1}(z_i)$$

il résulte de (22) que :

$$\Delta \mu_e(z_i) = \frac{\Delta z_e}{z_i [\mu_e(z_i) + \mu_{e-1}(z_i)]} \quad , z_i \neq 0 \quad (24)$$

et par suite que :

$$\lim_{\Delta z_e^* \rightarrow 0} \Delta \mu_e(z_i) = 0 \quad (25)$$

Le résultat précédent indique que, lorsque le nombre de points sur l'axe des z augmente indéfiniment, l'ensemble $\{\mu_e(z_i)\}$ devient dense dans l'intervalle $[0,1[$. L'existence de cette propriété conditionne la convergence de la solution discrète vers la solution exacte de l'équation.

Il existe un grand nombre de choix possible des ensembles $\{z_i^*\}$ ou $\{\mu_e(z_i)\}$. La solution la plus simple et la plus économique consiste à imposer des valeurs égales à deux valeurs correspondantes $\mu_e(z_i)$ et $\mu_e(z_{i+1})$ sur deux caractéristiques consécutives. Pour cela supposons que l'ensemble $\{z_i, z_i \in]z_0, L]\}$ soit constitué de $N+1$ points et raisonnons dans le demi-plan $\mu > 0$. La première valeur de μ positive à l'anode correspond à l'abscisse z_N ($z_{N+1} = L$) à travers la relation:

$$\mu_1^2(L) = 1 - \frac{z_N - z_0}{L - z_0}$$

De la même manière :

$$\mu_1^2(z_N) = 1 - \frac{z_{N-1} - z_0}{z_N - z_0}$$

Par suite :

$$\mu_1(z_N) = \mu_1(L) \Rightarrow z_{N-1} - z_0 = \frac{(z_N - z_0)^2}{L - z_0} = (L - z_0) \left(\frac{z_N - z_0}{L - z_0} \right)^2$$

De même :

$$z_{N-2} - z_0 = (L - z_0) \left(\frac{z_{N-1} - z_0}{L - z_0} \right)^2 = (L - z_0) \left(\frac{z_N - z_0}{L - z_0} \right)^4$$

plus généralement :

$$\frac{z_{N-m} - z_0}{L - z_0} = \left(\frac{z_N - z_0}{L - z_0} \right)^{2^m}, \quad m \in [1, N] \quad (26)$$

La relation ci-dessus permet de définir l'ensemble $\{z_i\}$ (auquel on adjoint le point z_0). Il suffit pour cela de choisir le nombre de points ($N+1$) voulu ainsi que le premier intervalle ($z_1 - z_0$) ou ($z_{N+1} - z_N$), à gauche ou à droite du tableau.

Si l'on pose :

$$\Delta z_{N-m} = z_{N-m} - z_{N-m-1}$$

et si pour simplifier, on se place sur la caractéristique $w=0$ ($z_0=0$), il vient :

$$\Delta z_{N-m} = L \left(\frac{z_N}{L} \right)^{2^m} \left[1 - \left(\frac{z_N}{L} \right)^2 \right] \quad (27)$$

Il est évident que Δz_{N-m} est une fonction décroissante de m et, par suite :

$$\Delta z_1 < \Delta z_2 < \dots < \Delta z_{N+1}$$

Les inégalités ci-dessus montrent que les intervalles Δz_i sont de plus en plus serrés au fur et à mesure que l'on se rapproche de z_0 . Les relations (24), (26) et (27) définissent de manière unique la structure du maillage choisi.

Le premier schéma de discrétisation se définit alors simplement sur ce maillage en supposant en premier lieu que les produits :

$$\Phi(\gamma) = \frac{\sigma(\gamma)}{\sigma_T(\gamma)} \quad S(\gamma) = \Phi^k(\gamma)$$

et

$$\Phi(\gamma, w_j) = \frac{\sigma_{0,j}(\gamma)}{\sigma_T(\gamma)} \quad S(\gamma, w_j) = \Phi^{k,j}(\gamma)$$

sont constants le long des caractéristiques entre deux points z_i et z_{i+1} .

Alors, si l'on introduit un ensemble discret de valeurs de w défini par :

$$\{w_k\}, \quad k=1, \dots, K$$

et

$$\sup_k \{w_k\} = w_{\max}, \quad \inf_k \{w_k\} = -E.L$$

Les équations (17), (18) et (19) prennent la forme ;

- Zone I :

a - $\mu \leq 0, \quad z_i \in [0, L]$

$$\begin{aligned} f_i^k(z_{i-e}^*) &= f_{i+1}^{-k}(z_{i-e}^*) \alpha(z_{i+1}, z_i, z_{i-e}^*) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\Phi_i^k + \sum_j \Phi_i^{k,j} \right) [1 - \alpha(z_{i+1}, z_i, z_{i-e}^*)] \end{aligned} \quad (28)$$

on a posé $\Phi_i^k = \Phi(z_i), \quad \Phi_i^{k,j} = \Phi^{k,j}(z_i)$

b - $\mu > 0$

a-1 $z_{i+1-e}^* \in [0, L], \quad z_i \in [z_e^*, L]$

$$\begin{aligned} f_{i+1}^{+k}(z_{i+1-e}^*) &= f_i^{+k}(z_{i+1-e}^*) \alpha(z_{i+1}, z_i, z_{i+1-e}^*) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\Phi_{i+1}^k + \sum_j \Phi_{i+1}^{k,j} \right) [1 - \alpha(z_{i+1}, z_i, z_{i+1-e}^*)] \end{aligned} \quad (29)$$

b-2 $z_e^* \leq 0, \quad z_i \in [0, L]$

Expression identique à (29).

- Zone II :

a - $\mu \leq 0, \quad z_i \in [z_0, L]$

Expression identique à (28).

$$b - \mu > 0, \quad z_i \in [z_0, L]$$

Expression identique à (29).

Les relations (28) et (29) correspondent uniquement à une discrétisation en position. La discrétisation angulaire nécessite simplement la modification des termes Φ_i^k et $\Phi_i^{k,j}$ dans lesquels les expressions intégrales :

$$S(z_i) \quad S(z_i, w_j)$$

sont évidemment approchées par une somme discrète. Compte tenu de la structure du maillage choisi, on a de manière générale :

$$S(z_i) = \int_0^1 \left\{ f_i^{+k} [\tilde{\mu}'(z_i, z_e^*)] + f_i^{-k} [\tilde{\mu}'(z_i, z_e^*)] \right\} d\tilde{\mu}'(z_i, z_e) \\ \simeq \sum_{\ell=0}^i \omega_{i,\ell} (f_{i,\ell}^{+k} + f_{i,\ell}^{-k}) = S_i^k$$

$$\text{avec } \omega_{i,\ell} \geq 0, \quad \sum_{\ell=0}^i \omega_{i,\ell} = 1$$

$$\text{de même } S(z_i, w_j) \simeq \sum_{\ell=0}^i \omega_{i,\ell} (f_{i,\ell}^{+k,j} + f_{i,\ell}^{-k,j}) = S_i^{k,j}$$

On peut maintenant écrire :

- Zone I :

$$a - \mu \leq 0, \quad z_i \in [0, L]$$

$$f_{i,\ell}^{-k} = f_{i+1,\ell+1}^{-k} \alpha(z_{i+1}, z_i, z_{i-\ell}^*) \\ + \frac{1}{2} \left(\Phi_i^k + \sum_j \tilde{\Phi}_{i+1}^{k,j} \right) [1 - \alpha(z_{i+1}, z_i, z_{i-\ell}^*)] \quad (30)$$

$$b - \mu > 0$$

$$b-1 \quad z_{i+1-\ell}^* \in [0, L], \quad z_i \in [z_e^*, L]$$

$$f_{i+1,\ell}^{+k} = f_{i,\ell-1}^{+k} \alpha(z_{i+1}, z_i, z_{i+1-\ell}^*) \\ + \frac{1}{2} \left(\tilde{\Phi}_{i+1}^k + \sum_j \tilde{\Phi}_{i+1}^{k,j} \right) [1 - \alpha(z_{i+1}, z_i, z_{i+1-\ell}^*)] \quad (31) \\ b-2 \quad z_{i+1-\ell}^* \leq 0, \quad z_i \in [0, L]$$

Expression identique à (31).

Dans les relations (30) et (31) on a posé :

$$\tilde{\Phi}_i^k = \frac{\sigma_i}{\sigma_{T,i}} S_i^k \quad \text{et} \quad \tilde{\Phi}_i^{k,j} = \frac{\sigma_{0,j,i}}{\sigma_{T,i}} S_i^{k,j}$$

avec $\sigma_i = \sigma(z_i) \quad , \quad \sigma_{T,i} = \sigma_T(z_i) \quad , \quad \sigma_{0,j,i} = \sigma_{0,j}(z_i)$

- Zone II :

a - $\mu \leq 0 \quad , \quad z_i \in [z_0, L]$

Expression identique à (30).

b - $\mu > 0 \quad , \quad z_i \in [z_0, L]$

Expression identique à (31).

Les poids $\omega_{i,e}$ peuvent être définis d'un grand nombre de manières différentes suivant la précision d'intégration désirée. Etant donné la nature de ce premier schéma de discrétisation, on verra plus loin qu'il est suffisant d'intégrer par une méthode du type "trapèzes". On a alors :

$$\omega_{i,e} = \frac{\mu_{e+1}(z_i) - \mu_{e-1}(z_i)}{2} \quad (32)$$

Sur la caractéristique le long de laquelle se propage la discontinuité il est nécessaire de modifier la définition ci-dessus, soit :

$$\omega_{i,e_1} = \frac{\mu_e(z_i) - \mu_{e-1}(z_i)}{2} \quad ; \quad \omega_{i,e_2} = \frac{\mu_{e+1}(z_i) - \mu_e(z_i)}{2} \quad (33)$$

avec

$$\omega_{i,e} = \omega_{i,e_1} + \omega_{i,e_2}$$

L'ensemble des relations (30), (31), (32) et (33) définissent le premier schéma de discrétisation. La détermination de la fonction de distribution discrète $f_{i,e}^{+k}$ s'effectue alors de proche en proche compte tenu des conditions aux limites choisies. Toutefois ayant d'aller plus loin il me paraît indispensable de déterminer la précision avec laquelle $f_{i,e}^{+k}$ est obtenue. C'est pourquoi, au cours du paragraphe suivant, je vais étudier la consistance, la convergence et la stabilité du schéma proposé ci-dessus.

II.3. CONSISTANCE, CONVERGENCE ET STABILITE.

II.3.1. Etude de la consistance.

Introduisons en premier lieu les notations :

$$\begin{aligned}
 T[f^{+k}(z, z^*)] &= f^{+k}(z, z^*) - f^{+k}(z_i, z^*) \alpha(z, z_i, z^*) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_{z_i}^z \Phi^k(y) \frac{d}{dy} \alpha(z, y, z^*) dy \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_j \int_{z_i}^z \Phi^{k,j}(y) \frac{d}{dy} \alpha(z, y, z^*) dy \\
 T_{\Delta z_{i+1}}[f^{+k}(z_{i+1}, z_{i+1-l}^*)] &= f^{+k}(z_{i+1}, z_{i+1-l}^*) - f^{+k}(z_i, z_{i+1-l}^*) \alpha(z_{i+1}, z_i, z_{i+1-l}^*) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left[\Phi^k(z_{i+1}) + \sum_j \Phi^{k,j}(z_{i+1}) \right] \left[1 - \alpha(z_{i+1}, z_i, z_{i+1-l}^*) \right] \\
 T_{\Delta z_{i+1}}^{\Delta \mu_\ell}[f^{+k}(z_{i+1}, z_{i+1-l}^*)] &= f^{+k}(z_{i+1}, z_{i+1-l}^*) - f^{+k}(z_i, z_{i+1-l}^*) \alpha(z_{i+1}, z_i, z_{i+1-l}^*) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left[\tilde{\Phi}^k(z_{i+1}) + \sum_j \tilde{\Phi}^{k,j}(z_{i+1}) \right] \left[1 - \alpha(z_{i+1}, z_i, z_{i+1-l}^*) \right]
 \end{aligned} \tag{34}$$

L'expression (34) représente la restriction de (18) à l'intervalle $[z_i, z_{i+1}]$. Les relations (35) et (36) correspondent respectivement à (29) et (31). On a posé :

$$\begin{aligned}
 S^k(y) &= \int_0^1 [f^+(y, \tilde{\mu}', w_k) + f^-(y, \tilde{\mu}', w_k)] d\tilde{\mu}' \\
 S^{k,j}(y) &= \int_0^1 [f^+(y, \tilde{\mu}', w_k + \varepsilon_j) + f^-(y, \mu', w_k + \varepsilon_j)] d\tilde{\mu}' \\
 \Phi^k(z_{i+1}) &= \frac{\sigma_{i+1}}{\sigma_{T,i+1}} S^k(z_{i+1}) \\
 \Phi^{k,j}(z_{i+1}) &= \frac{\sigma_{0,j,i+1}}{\sigma_{T,i+1}} S^{k,j}(z_{i+1}) \\
 \tilde{\Phi}^k(z_{i+1}) &= \frac{\sigma_{i+1}}{\sigma_{T,i+1}} \sum_{\ell=0}^i \omega_{i+1,\ell} [f^{+k}(z_{i+1}, z_\ell^*) + f^{-k}(z_{i+1}, z_\ell^*)] \\
 \tilde{\Phi}^{k,j}(z_{i+1}) &= \frac{\sigma_{0,j,i+1}}{\sigma_{T,i+1}} \sum_{\ell=0}^i \omega_{i+1,\ell} [f^{+k,j}(z_{i+1}, z_\ell^*) + f^{-k,j}(z_{i+1}, z_\ell^*)]
 \end{aligned}$$

Dans ces conditions, l'équation discrète (31) est dite consistante avec l'équation initiale (18) si l'on a :

$$\lim_{\substack{\Delta z_{i+1} \rightarrow 0 \\ \Delta \mu_\ell \rightarrow 0}} \left| T[f^{+k}(z, z^*)] - T_{\Delta z_{i+1}}^{\Delta \mu_\ell}[f^{+k}(z_{i+1}, z_{i+1-l}^*)] \right|_{\substack{z=z_i \\ z^*=z_{i+1-l}^*}} = 0 \quad \forall i \in [0, N], \ell \in [0, N], k \in [1, M]. \tag{37}$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned}
 |\Delta T| &= \left| T \left[f^{+k}(z_{i+1}, z_{i+1-\ell}^*) \right] - T_{\Delta z_{i+1}}^{\Delta \mu_\ell} \left[f^{+k}(z_{i+1}, z_{i+1-\ell}^*) \right] \right| \\
 &\leq \left| T \left[f^{+k}(z_{i+1}, z_{i+1-\ell}^*) \right] - T_{\Delta z_{i+1}} \left[f^{+k}(z_{i+1}, z_{i+1-\ell}^*) \right] \right| \\
 &\quad + \left| T_{\Delta z_{i+1}} \left[f^{+k}(z_{i+1}, z_{i+1-\ell}^*) \right] - T_{\Delta z_i}^{\Delta \mu_\ell} \left[f^{+k}(z_{i+1}, z_{i+1-\ell}^*) \right] \right| \\
 &= |\Delta_1 T| + |\Delta_2 T|
 \end{aligned} \tag{36}$$

Compte tenu des relations (34) et (35), il vient immédiatement :

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 T &= -\frac{1}{2} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \left[\Phi^k(y) + \sum_j \Phi^{kj}(y) \right] \frac{d}{dy} \alpha(z, y, z^*) dy \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left[\Phi^k(z_{i+1}) + \sum_j \Phi^{kj}(z_{i+1}) \right] \left[1 - \alpha(z_{i+1}, z_i, z_{i+1-\ell}^*) \right]
 \end{aligned} \tag{37}$$

Si l'on admet que $\Phi^k(y)$ (ou $\Phi^{kj}(y)$) possède des dérivées continues et bornées jusqu'à un ordre suffisamment élevé, on peut développer $\Phi^k(y)$ en série de Taylor au voisinage du point z_{i+1} . On a :

$$\Phi^k(y) = \Phi^k(z_{i+1}) - (z_{i+1} - y) \left[\frac{d\Phi}{dy} \right]_{i+1} + o \left[(z_{i+1} - y)^2 \right] \tag{38}$$

Portant (38) dans (37) et passant aux valeurs absolues, on obtient :

$$|\Delta_1 T| \leq \frac{1}{2} \left[\left| \frac{d\Phi^k}{dy} \right|_{i+1} + \sum_j \left| \frac{d\Phi^{kj}}{dy} \right|_{i+1} \right] \left[1 - \alpha(z_{i+1}, z_i, z_{i+1-\ell}^*) \right] \Delta z_{i+1} \tag{39}$$

De même, pour $\Delta_2 T$, il vient :

$$\begin{aligned}
 \Delta_2 T &= -\frac{1}{2} \left\{ \left[\Phi^k(z_{i+1}) + \sum_j \Phi^{kj}(z_{i+1}) \right] - \left[\tilde{\Phi}^k(z_{i+1}) + \sum_j \tilde{\Phi}^{kj}(z_{i+1}) \right] \right\} \\
 &\quad \times \left[1 - \alpha(z_{i+1}, z_i, z_{i+1-\ell}^*) \right]
 \end{aligned} \tag{40}$$

Alors, compte tenu des relations :

$$0 < \frac{\sigma_{i+1}}{\sigma_{T,i+1}} \leq 1 \quad ; \quad 0 \leq \frac{\sigma_{0,j,i+1}}{\sigma_{T,i+1}} < 1 \tag{40a}$$

$$\Delta \mu(z_{i+1}) = \sup \Delta \mu_\ell(z_{i+1}) \quad , \quad \ell \in [0, i+1] \tag{40b}$$

et de la formule classique donnant l'erreur de troncature de la méthode des trapèzes.

$$\begin{aligned}
 |\Delta_2 T| &\leq \frac{1}{24} \left[1 - \alpha(z_{i+1}, z_i, z_{i+1-\ell}^*) \right] \left\{ \left| 2 \left[\frac{\partial f^{+k}(z_{i+1})}{\partial \tilde{\mu}'} \right]_{\tilde{\mu}'=0} - \left[\frac{\partial f^{+k}(z_{i+1})}{\partial \mu'} + \frac{\partial f^{-k}(z_{i+1})}{\partial \tilde{\mu}'} \right]_{\tilde{\mu}'=1} \right| \right. \\
 &\quad \left. + \dots \right\}
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_j \frac{E z_{i+1} + w_j}{E z_{i+1}} \left| 2 \left[\frac{\partial f^{kj}(z_{i+1})}{\partial \tilde{\mu}'} \right]_{\tilde{\mu}'=0} - \left[\frac{\partial f^{kj}(z_{i+1})}{\partial \tilde{\mu}'} + \frac{\partial f^{-kj}(z_{i+1})}{\partial \tilde{\mu}'} \right]_{\tilde{\mu}'=1} \right| \Delta \mu^2(z_{i+1})$$

Introduisons maintenant les notations :

$$\Delta \mu = \sup_{i \in [0, N-1]} \Delta \mu(z_{i+1}) \quad (40c)$$

$$\alpha = \sup_{\substack{i \in [0, N-1] \\ l \in [0, i+1]}} [1 - \alpha(z_{i+1}, z_i, z_{i+1-l}^*)] \quad (40d)$$

$$F^k = \sup_{i \in [0, N-1]} \left| 2 \left[\frac{\partial f^{kj}(z_{i+1})}{\partial \tilde{\mu}} \right]_{\tilde{\mu}'=0} - \left[\frac{\partial f^{kj}(z_{i+1})}{\partial \tilde{\mu}'} + \frac{\partial f^{-kj}(z_{i+1})}{\partial \tilde{\mu}'} \right]_{\tilde{\mu}'=1} \right| \quad (40e)$$

$$R = \sup_{i \in [0, N-1], j} \frac{E z_{i+1} + w_j}{E z_{i+1}} \quad (40f)$$

Alors :

$$|\Delta_2 T| \leq \frac{1}{24} \alpha (F^k + R \sum_j F^{kj}) \Delta \mu^2$$

Revenons à la relation (39) et posons :

$$\Theta = \sup_{i \in [0, N-1]} \left\{ \left| \frac{d\Phi^k}{dy} \right|_{i+1} + \sum_j \left| \frac{d\Phi^{kj}}{dy} \right|_{i+1} \right\}$$

$$\Delta z = \sup_{i \in [0, N-1]} \Delta z_{i+1}$$

Il vient en définitive :

$$|\Delta T| \leq \frac{\alpha}{2} \left[\Theta \Delta z + \frac{1}{12} (F^k + R \sum_j F^{kj}) \Delta \mu^2 \right] = \tau^k \quad (41)$$

La relation ci-dessus prouve la consistance de l'équation discrétisée vis à vis de l'équation initiale (18) lorsque $\Delta z \rightarrow 0$, $\forall i \in [0, N-1]$ et à condition que les dérivées intervenant dans Θ et F^k soient continues et bornées.

La démonstration qui précède est relative à l'équation (18) c'est-à-dire au cas $\mu > 0$. Les calculs pour $\mu < 0$ se conduisent de la même manière et on aboutit à une relation identique à (41). Cependant, lorsque l'on se trouve dans le plan défini par $w=0$, une difficulté se présente car le rapport

$$\frac{E z_i + w_j}{E z_i}$$

devient infini pour $i=0$. Toutefois, le produit :

$$\sigma_{0,j,i} \frac{E z_i + w_j}{E z_i}$$

demeure, lui, fini et la consistance est encore vérifiée,

Le terme τ^k de (41) est un majorant de l'erreur de troncature. Le schéma est uniformément d'ordre Δz quels que soient i et ℓ . C'est donc en théorie un schéma nécessitant un pas Δz très petit pour obtenir une bonne précision. Toutefois, comme on le verra plus loin, il converge vers la solution exacte et il est stable. Par ailleurs, il est relativement facile de prouver la convergence du processus itératif utilisé. Ce sont ces raisons qui m'ont poussé à l'étudier en détail. De toutes façons, il est possible de construire des schémas plus précis d'ordre Δz^2 en adoptant une hypothèse moins grossière pour la variation de $\Phi(y)$ dans l'intervalle (z_i, z_{i+1}) . J'en donnerai quelques exemples dans un paragraphe ultérieur.

II.3.2. Etude de la convergence.

Avant d'aborder en détail l'étude de la convergence, il est indispensable de préciser un certain nombre de points qui nous seront utiles par la suite. Tout d'abord il est important de rappeler qu'il ne peut y avoir convergence que si la méthode numérique d'intégration choisie pour approximer les termes sources elle-même converge.

Il faut pour cela en premier lieu que l'ensemble $\{\mu_\ell(z_i)\}$ de points où la fonction est évaluée devienne dense dans $]0,1[$ lorsque le nombre de points de cet ensemble devient infini. Cela a déjà été prouvé dans un paragraphe précédent. Il faut également que la fonction à intégrer appartienne à une certaine classe de fonctions telles que :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^{i+1} \omega_{i+1,\ell} f^k(z_{i+1}, z_\ell^*) = \int_0^1 f^k(z_{i+1}, \tilde{\mu}') d\tilde{\mu}'$$

On admettra dans ce qui suit qu'il en est effectivement ainsi.

La démonstration de la convergence nécessite l'évaluation de la "distance" (ou norme) qui sépare la solution approchée de la solution réelle. En fait, il n'est pas nécessaire de déterminer la valeur exacte de cette distance : il suffit d'en connaître un majorant qui demeure infiniment petit lorsque $\Delta z \rightarrow 0$. Pour cela, il faut faire un choix parmi les différentes normes existantes. Dans cette étude, on utilisera la norme de la convergence uniforme. Alors, étant donné une fonction à valeurs discrètes $g_{i,\ell}$ définie sur $\{z_i\} \times \{\mu_\ell(z_i)\}$, on peut écrire :

$$\|g_i\| = \sup_{\mu_\ell(z_i)} |g_{i,\ell}|, \quad \text{et} \quad \|g\| = \sup_i \|g_i\| \quad (42)$$

L'expression $\|g_i\|$ représente la norme partielle de $g_{i,\ell}$ associée à un i donné, $\|g\|$ désignant par suite la norme totale de $g_{i,\ell}$. Introduisons les notations suivantes :

$$w_i^{\pm k} = \sum_{\ell=0}^i \omega_{i,\ell} e_{i,\ell}^{\pm k} \quad (43)$$

$$v_i^{\pm k} = \sum_{\ell=0}^i \omega_{i,\ell} |e_{i,\ell}^{\pm k}| \quad (44)$$

$$e_{i,\ell}^{\pm k} = f^{\pm k}(z_i, z_\ell^*) - f_{i,\ell}^{\pm k} \quad (45)$$

Notre but dans ce qui suit est donc de montrer que l'erreur $e_{i,e}^{+k}$ est telle que :

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \|e^k\| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \|e^{+k}\| = 0 \quad (46)$$

Revenons pour cela aux relations (30), (31), (17) et (18). Dans l'intervalle $[z_i, z_{i+1}]$ l'équation (18) prend la forme :

$$f^{+k}(z_{i+1}, z_{i+1-e}^*) = f^{+k}(z_i, z_{i+1-e}^*) \alpha(z_{i+1}, z_i, z_{i+1-e}^*) + \frac{1}{2} \int_{z_i}^{z_{i+1}} [\Phi^k(y) + \sum_j \Phi^{kj}(y)] \frac{d}{dy} \alpha(z_{i+1}, y, z_{i+1-e}^*) dy \quad (47)$$

Si l'on développe $\Phi^k(y)$ et $\Phi^{kj}(y)$ en série de Taylor centrée au point z_{i+1} et si l'on remplace l'intégrale en $\tilde{\mu}'$ dans $\Phi^k(y)$ et $\Phi^{kj}(y)$ par une somme discrète il vient, en tenant compte des erreurs commises au cours de ces deux approximations :

$$f^{+k}(z_{i+1}, z_{i+1-e}^*) = f^{+k}(z_i, z_{i+1-e}^*) \alpha(z_{i+1}, z_i, z_{i+1-e}^*) + \frac{1}{2} \left(\tilde{\Phi}_{i+1}^k + \sum_j \tilde{\Phi}_{i+1}^{k,j} + \tau_{i+1}^{+k} \right) [1 - \alpha(z_{i+1}, z_i, z_{i+1-e}^*)] \quad (48)$$

où τ_{i+1}^{+k} est tel que :

$$|\tau_{i+1}^{+k}| \leq \tau^k \quad (49a)$$

avec τ^k défini par (41).

Si l'on retranche (31) de (48), il vient :

$$e_{i+1,e}^{+k} = e_{i,e-1}^{+k} \alpha(z_{i+1}, z_i, z_{i+1-e}^*) + \frac{1}{2} \left(\tilde{\Phi}_{i+1}^{*k} + \sum_j \tilde{\Phi}_{i+1}^{*k,j} + \tau_{i+1}^{+k} \right) [1 - \alpha(z_{i+1}, z_i, z_{i+1-e}^*)] \quad (50a)$$

avec :

$$\tilde{\Phi}_{i+1}^{*k} = \frac{\sigma_{i+1}}{\sigma_{T,i+1}} (w_{i+1}^{+k} + w_{i+1}^{-k})$$

$$\tilde{\Phi}_{i+1}^{*k,j} = \frac{\sigma_{0,j,i+1}}{\sigma_{T,i+1}} (w_{i+1}^{+k,j} + w_{i+1}^{-k,j}) \frac{E z_{i+1} + w_j}{E z_i + 1}$$

En procédant de la même manière pour (17) et (30), il vient :

$$e_{i+1,e}^{-k} = e_{i+2,e+1}^{-k} \alpha(z_{i+2}, z_{i+1}, z_{i+1-e}^*) + \frac{1}{2} \left(\tilde{\Phi}_{i+1}^{*k} + \sum_j \tilde{\Phi}_{i+1}^{*k,j} + \tau_{i+1}^{-k} \right) [1 - \alpha(z_{i+2}, z_{i+1}, z_{i+1-e}^*)] \quad (50b)$$

où comme ci-dessus :

$$|\tau_{i+1}^{-k}| \leq \tau^k$$

Alors, si l'on somme les deux relations (50) sur tout l'espace interélectrode, on obtient :

$$\begin{aligned} e_{i+1,e}^{+k} &= e_{i+1-e,i+1-e}^{-k} \cdot \alpha(z_{i+1}, z_{i+1-e}, z_{i+1-e}^*) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=i+1-e}^i (\tilde{\Phi}_{k+1}^{*k} + \sum_j \tilde{\Phi}_{k+1}^{*k,j}) [\alpha(z_{i+1}, z_{k+1}, z_{i+1-e}^*) - \alpha(z_{i+1}, z_A, z_{i+1-e}^*)] \\ e_{i+1,e}^{-k} &= - \sum_{k=i+1}^{N-1} (\tilde{\Phi}_k^{*k} + \sum_j \tilde{\Phi}_k^{*k,j}) [\alpha(z_{k+1}, z_{i+1}, z_{i+1-e}^*) - \alpha(z_A, z_{i+1}, z_{i+1-e}^*)] \end{aligned} \quad (51a)$$

(51b)

Aux expressions ci-dessus on a associé les nouvelles conditions aux limites :

- Zone I :

$$e_{0,e}^{+k} = 0, \quad e_{N,e}^{-k} = 0, \quad e_{i,i-e}^{+k} = e_{i,i-e}^{-k}$$

- Zone II :

$$e_{N,e}^{-k} = 0, \quad e_{i,i-e}^{+k} = e_{i,i-e}^{-k}$$

Pour des raisons de simplicité évidentes on limitera l'étude qui va suivre à la zone II.

En premier lieu, on peut remarquer que, compte tenu de (40a) :

$$\tilde{\Phi}_k^{*k} + \sum_j \tilde{\Phi}_k^{*k,j} \leq w_k^{+k} + w_k^{-k} + \sum_j \frac{E z_k + w_j}{E z_k} (w_k^{+k,j} + w_k^{-k,j}) \quad (52)$$

Dans ces conditions, on peut écrire :

$$\begin{aligned} |e_{i+1,e}^{+k}| &\leq \frac{1}{2} \left[\|w^k\| + R \sum_j \|w^{k,j}\| + \tau^k \right] \times \\ &\times \left[1 - \alpha(z_N, z_{i+1-e}, z_{i+1-e}^*) \alpha(z_{i+1}, z_{i+1-e}, z_{i+1-e}^*) \right] \end{aligned} \quad (53a)$$

où R est défini par (40 f) et où l'on a posé :

$$\|w^k\| = \|w^{+k}\| + \|w^{-k}\|$$

et, de même pour $|e_{i+1,e}^{-k}|$

$$\left| e_{i+1,e}^{-k} \right| \leq \frac{1}{2} \left[\|w^k\| + R \sum_j \|w^{kj}\| + \tau^k \right] \times \\ \times \left[1 - \alpha(z_N, z_{i+1-e}, z_{i+1-e}^*) \alpha(z_{i+1-e}, z_{i+1}, z_{i+1-e}^*) \right] \quad (53b)$$

Si l'on multiplie les équations (53) par $\omega_{i+1,e}$ et si l'on effectue la sommation par rapport à e des relations obtenues, il vient, compte tenu de (44) :

$$v_{i+1}^k = v_{i+1}^{+k} + v_{i+1}^{-k} \leq \left[\|w^k\| + R \sum_j \|w^{kj}\| + \tau^k \right] \times \\ \times \left\{ 1 - \omega_{i+1,e} \alpha(z_N, z_{i+1-e}, z_{i+1-e}^*) \cosh \left[N_0 \int_{z_{i+1-e}}^{z_{i+1}} \frac{\sigma(\eta)}{\mu(\eta, z_{i+1-e}^*)} d\eta \right] \right\} \quad (54)$$

Comme le cosinus hyperbolique est borné inférieurement par un, il vient :

$$v_{i+1}^k \leq (\|w^k\| + R \sum_j \|w^{kj}\| + \tau^k) \times \{ 1 - F_{i+1} \} \quad (55)$$

avec

$$F_i = \sum_{e=0}^i \omega_{i,e} \alpha(z_N, z_{i-e}, z_{i-e}^*) \quad (56)$$

Si l'on pose :

$$F = \inf_{i \in [0, N]} F_i$$

Alors :

$$\|v^k\| \leq (\|w^k\| + R \sum_j \|w^{kj}\| + \tau^k) (1 - F) \quad (57)$$

De plus, compte tenu de la relation :

$$\|u^k\| \leq \|v^k\|$$

on a :

$$\|v^k\| \leq \frac{1-F}{F} (R \sum_j v^{kj} + \tau^k) \quad (58)$$

D'autre part, des relations (53) on peut tirer les inégalités :

$$\|e^k\| \leq \frac{1}{2} (\|v^k\| + R \sum_j \|v^{kj}\| + \tau^k) \quad (59)$$

Enfin, en portant (58) dans (59) et en utilisant l'inégalité évidente :

$$\|v^{kj}\| \leq 2 \|e^{kj}\|$$

il vient :

$$\boxed{\|e^k\| \leq (2F)^{-1} (2 \sum_j \|e^{kj}\| + \tau^k)} \quad (60)$$

La relation ci-dessus prouve la convergence de la solution discrète vers la solution exacte à condition toutefois que $\|e^{kj}\|$ tende vers zéro en même temps que τ^k . Or, sur la caractéristique d'énergie maximale (w_K), (60) s'écrit :

$$\|e^k\| \leq (2F)^{-1} \tau^k \quad (61)$$

La nullité de $\|e^{kj}\|$ provient de l'hypothèse effectuée relativement à l'existence d'une borne supérieure dans l'espace des énergies. D'autre part, on verra plus loin que le déroulement des calculs s'effectue des hautes (w_K) vers les basses (w_1) énergies. Il s'ensuit, que la relation (46) sera vérifiée quelque soit k , si elle l'est pour $k=K$: c'est ce que montre (61).

L'étude que je viens d'effectuer ci-dessus est une généralisation d'un article de H. B. KELLER (Ke-1) relatif au transport des neutrons monoénergétiques en géométrie plane. Les relations que j'ai obtenues ici se ramènent exactement à celles de KELLER en posant simplement $z_{i+1-l}^* = z_{i+1} - \bar{\epsilon}^0$ quel que soit l , $\mu_e(z) = \mu_e(z_N)$, et en annulant les termes tenant compte des collisions inélastiques.

II.3.3. Etude de la stabilité.

L'étude de la stabilité se déroule de manière quasi-identique à celle de la convergence. Soit maintenant $g_{i+1,e}^{\pm k}$ (resp. $g'_{i+1,e}^{\pm k}$) la solution des systèmes (30) et (31) pour lesquels les termes sources sont remplacés par $\tilde{S}_{i+1}^{kj}$ (resp. $\tilde{S}'_{i+1}^{kj}$). Alors, on dit que le système approché est stable si :

$$\tilde{S}'_{i+1}^{kj} \longrightarrow \tilde{S}_{i+1}^{kj} \implies g'_{i+1,e}^{\pm k} \longrightarrow g_{i+1,e}^{\pm k} \quad (62)$$

Posons :

$$\|g^k\| = \sup_{i,e} |g'_{i+1,e}^{\pm k} - g_{i+1,e}^{\pm k}| \quad (63)$$

et

$$\|\tilde{S}^{kj}\| = \sup_{i,e} |\tilde{S}'_{i+1}^{kj} - \tilde{S}_{i+1}^{kj}| \quad (64)$$

Alors de la même manière qu'au paragraphe précédent :

$$\|g^k\| \leq \frac{R}{F} \sum_j \|\tilde{S}^{kj}\| \quad (65)$$

Le coefficient de $\sum_j \|\tilde{S}^{kj}\|$ étant borné pour tout Δz , la condition de stabilité est donc vérifiée.

11.3. DEUXIEME SCHEMA DE DISCRETISATION.

Comme on l'a vu plus haut, le premier schéma de discrétisation est seulement d'ordre Δz , et, par suite, nécessite un grand nombre de points pour que les résultats soient suffisamment précis. Il est facile en principe d'améliorer la précision en adoptant une hypothèse de variation des fonctions $\Phi^k(y)$ et $\Phi^{kj}(y)$ moins sévère que celle utilisée pour l'instant.

La modification la plus simple et la plus rapide consiste à admettre que les fonctions $\Phi^k(y)$ et $\Phi^{kj}(y)$ sont constantes dans l'intervalle (z_i, z_{i+1}) mais égales à :

$$(\Phi_i^k + \Phi_{i+1}^k) / 2 \quad \text{et} \quad (\Phi_i^{kj} + \Phi_{i+1}^{kj}) / 2$$

Dans ces conditions, le schéma est toujours d'ordre Δz , mais le terme d'erreur, au lieu d'être proportionnel à Φ_{i+1}^{kj} est proportionnel à $(\Phi_{i+1}^{kj} - \Phi_i^{kj})$ ce qui constitue une importante amélioration de la précision, les dérivées premières de $\Phi^{kj}(y)$ étant monotones dans le domaine de variation.

La deuxième modification à effectuer pour obtenir un schéma plus précis, consiste à supposer que les fonctions $\Phi^k(y)$ et $\Phi^{kj}(y)$ varient linéairement dans (z_i, z_{i+1}) . Le schéma devient alors d'ordre Δz^2 sauf peut être au voisinage de $\mu=0$ où il semble être toujours d'ordre Δz . L'étude de la convergence s'effectue de la même manière que pour le premier schéma et conduit aux mêmes inégalités, la seule modification se situant au niveau de l'erreur de discrétisation τ^k .

La comparaison des résultats fournis par les trois schémas ci-dessus sera effectuée au cours du chapitre suivant.

CHAPITRE III

ETUDE DE LA CONVERGENCE DU SCHEMA NUMERIQUE ITERATIF ADOPTE

»»»»»

J'ai défini au cours du chapitre précédent un schéma de discrétisation dont j'ai montré la consistance, la convergence et la stabilité. Nous allons voir, au cours de ce chapitre comment ce schéma peut être mis en oeuvre en pratique, et, en particulier j'étudierai la convergence du processus itératif utilisé.

Comme on l'a déjà dit, dans les schémas originaux de la S_N méthode (Ca-2) CARLSON supposait le terme source connu et résolvait l'équation ainsi obtenue comme une équation aux dérivées partielles. Puis il déduisait du résultat un nouveau terme source qui lui donnait une meilleure approximation du résultat et amorçait ainsi un processus itératif dont la convergence était toujours lente sinon incertaine. Dans le schéma utilisé ici, je considérerai l'équation exprimée le long de la caractéristique non plus comme une équation aux dérivées partielles dont le second membre est connu, mais bien comme une équation intégrodifférentielle pour laquelle je propose un processus itératif de résolution inconditionnellement convergent.

Pour effectuer cette démonstration, il est suffisant d'adopter un maillage réduit défini par quatre valeurs de Z_i (figure 8). De plus, de la même manière qu'au chapitre précédent, on n'effectuera les calculs que pour la zone II (les notations étant plus simples dans ce cas). Alors, compte tenu des résultats déjà obtenus, les équations discrètes s'écrivent :

a - $\mu \leq 0$

$$f_{i,e}^{-k} = f_{i+1,e+1}^{-k} \alpha_{i+1,i}^e + \frac{1}{2} (\tilde{\Phi}_i^k + \sum_j \tilde{\Phi}_i^{kj}) (1 - \alpha_{i+1,i}^e) \quad (66a)$$

b - $\mu > 0$

$$f_{i,e}^{+k} = f_{i-1,e-1}^{+k} \alpha_{i,i-1}^e + \frac{1}{2} (\tilde{\Phi}_i^k + \sum_j \tilde{\Phi}_i^{kj}) (1 - \alpha_{i,i-1}^e) \quad (66b)$$

avec :

$$\alpha(z_{i+1}, z_i, z_{i+1-\ell}^*) = \alpha_{i+1,i}^\ell$$

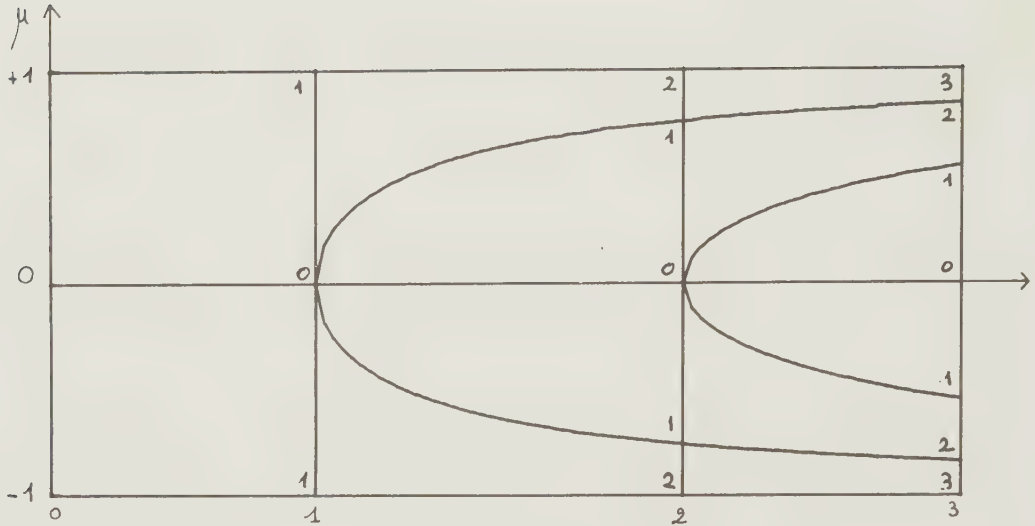


FIGURE 8

Les équations ci-dessus définissent un système de $(N+1)^2 - (N+1)$ équations à $(N+1)^2 - (N+1)$ inconnues de la forme :

$$A.X = Y \quad (67)$$

où A est une matrice carré d'ordre $(N+1)^2 - (N+1)$ et X et Y les vecteurs colonnes correspondants. Dans le cas du maillage de la figure 8, on a :

$$X^T = \left[f_{0,1}^-, f_{1,1}^-, f_{1,0}^-, f_{1,1}^+, f_{2,2}^-, f_{2,1}^-, f_{2,0}^-, f_{2,1}^+, f_{2,2}^+, f_{3,1}^+, f_{3,2}^+, f_{3,3}^+ \right] \quad (68)$$

$$Y^j = \left[\frac{1}{2} \tilde{\Phi}_0^{kj} \gamma_{1,0}^1, \frac{1}{2} \tilde{\Phi}_1^{kj} \gamma_{2,1}^1, \frac{1}{2} \tilde{\Phi}_1^{kj} \gamma_{2,1}^0, \frac{1}{2} \tilde{\Phi}_1^{kj} \gamma_{2,1}^1, \frac{1}{2} \tilde{\Phi}_2^{kj} \gamma_{3,2}^2, \right. \\ \left. , \frac{1}{2} \tilde{\Phi}_2^{kj} \gamma_{3,2}^1, \frac{1}{2} \tilde{\Phi}_2^{kj} \gamma_{3,2}^0, \frac{1}{2} \tilde{\Phi}_2^{kj} \gamma_{2,1}^1, \frac{1}{2} \tilde{\Phi}_2^{kj} \gamma_{2,1}^2, \right. \\ \left. , \frac{1}{2} \tilde{\Phi}_3^{kj} \gamma_{3,2}^1, \frac{1}{2} \tilde{\Phi}_3^{kj} \gamma_{3,2}^2, \frac{1}{2} \tilde{\Phi}_3^{kj} \gamma_{3,2}^3 \right] \quad (69)$$

on a posé :

$$Y = \sum_j Y^j$$

$$\gamma_{i,i-1}^\ell = 1 - \alpha_{i,i-1}^\ell$$

et X^T (resp. Y^T) désigne la matrice transposée de X (resp. Y).

La matrice A ci-contre est réductible. En effet, on peut l'écrire sous la forme (figure 9):

$$A = \begin{vmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \quad (70)$$

dans laquelle les sous-matrices irréductibles $A_{k\ell}$ correspondent aux régions délimitées par les pointillés. Dans ces conditions, le système linéaire (67) est équivalent à :

$$\begin{cases} A_{11} X_1 & = Y_1 \\ A_{21} X_1 + A_{22} X_2 & = Y_2 \end{cases} \quad (71) \quad (71b)$$

où X_1 et X_2 (resp. Y_1 et Y_2) représentent deux sous-matrices de X (resp. de Y).

Les relations (71) montrent que la résolution de (67) se réduit à celle de (71a) (la résolution de (71b) étant triviale une fois connue la solution de (71a)).

La matrice A_{11} est irréductible et diagonalement dominante. Sa matrice inverse est donc non singulière et ses éléments sont positifs ou nuls. Par suite A_{11} est une M-matrice (Va-1) et les méthodes de JACOBI ou de GAUSS-SEIDEL associées à (71a) convergent.

J'ai mentionné dans le chapitre précédent la possibilité d'utiliser des schémas différents dans le but d'accroître la précision des calculs. Le second schéma utilisé s'obtient encore en supposant le terme source constant dans l'intervalle z_i, z_{i+1} mais en le prenant égal cette fois à $(S_i + S_{i+1})/2$.

Des termes supplémentaires apparaissent dans la matrice A qui reste cependant une M-matrice, ce qui assure la convergence du processus numérique (cf. thèse de R. KELLER). C'est d'ailleurs ce schéma qui a été employé pour la plupart des calculs. Le gain par rapport au schéma précédent est très intéressant : si la durée d'une itération est légèrement plus grande, le nombre d'itérations diminue souvent de moitié. Il est à noter que les résultats obtenus dans les deux cas sont très voisins, dans le domaine où j'ai effectué des calculs.

Beaucoup plus décevante est l'utilisation d'un schéma d'ordre deux, obtenu en adoptant une variation linéaire du terme source entre z_i et z_{i+1} . Il est alors nécessaire d'utiliser une formule d'intégration plus précise que la formule des trapèzes. Bien que théoriquement plus exact que le précédent, ce schéma n'apporte qu'un gain de précision très faible, alors que sa mise en oeuvre est beaucoup plus difficile et sa vitesse moindre. Ceci est peut être dû au fait que la formule de quadrature utilisée (formule des trapèzes avec correction de bord) conduit à un schéma d'ordre un, au voisinage de $\mu = 0$. La consistance et la convergence du schéma peuvent s'établir de la même manière que pour le schéma d'ordre un. Quoiqu'il en soit ce schéma a été peu utilisé, du fait de sa lourdeur d'utilisation et du faible gain de précision apporté.

CHAPITRE IV

RESULTATS NUMERIQUES

Par souci d'homogénéité avec les calculs de la deuxième partie ainsi que dans un but de simplification, j'ai utilisé dans tout ce qui suit les sections efficaces de type II telles qu'elles sont définies plus loin au cours de la cinquième partie de mon travail.

Dans un premier temps je me suis intéressé à la détermination du facteur de transmission des électrons.

IV.1. ETUDE DU FACTEUR DE TRANSMISSION.

La méthode de résolution adoptée se prête particulièrement bien à l'évaluation du nombre de particules n_e qui reviennent à la cathode, compte tenu du nombre n_c de celles qui en sont parties. Le taux de rétrodiffusion est défini, par le rapport n_c/n_e . Par suite, le facteur de transmission, fraction des particules émises par la cathode et qui ne peuvent plus retourner à celle-ci, est égal à :

$$T_r(W) = T_r(\epsilon_0) = 1 - \frac{n_c}{n_e} \quad (72)$$

L'étude des caractéristiques effectuée au chapitre II nous a montré que seuls les électrons situés dans la zone I du diagramme peuvent éventuellement revenir à la cathode. Il s'ensuit que la détermination du facteur de transmission peut se faire indépendamment du comportement de la fonction de distribution dans la zone II. Dans ces conditions, le facteur de transmission est défini par :

$$T_r(\epsilon_0) = 1 - \left[\frac{\int_0^1 f^-(z, \epsilon_0, \tilde{\mu}') d\tilde{\mu}'}{\int_0^1 f^+(z, \epsilon_0, \tilde{\mu}') d\tilde{\mu}'} \right]_{z=0} \quad (73)$$

IV.1.1. Variation du facteur de transmission avec l'énergie d'émission à la cathode.

En règle générale, on a effectué le calcul du facteur de transmission correspondant à un électron monocinétique à la cathode. La distribution angulaire d'émission est considérée comme isotrope. Dans ces conditions, la variation du facteur de transmission en fonction de l'énergie d'émission $\mathcal{E}_0$ est représentée sur la figure 10 pour différentes valeurs du rapport E/p . Les courbes présentent toutes une même allure caractéristique avec un minimum compris entre 5 et 10 eV et cela quel que soit E/p .

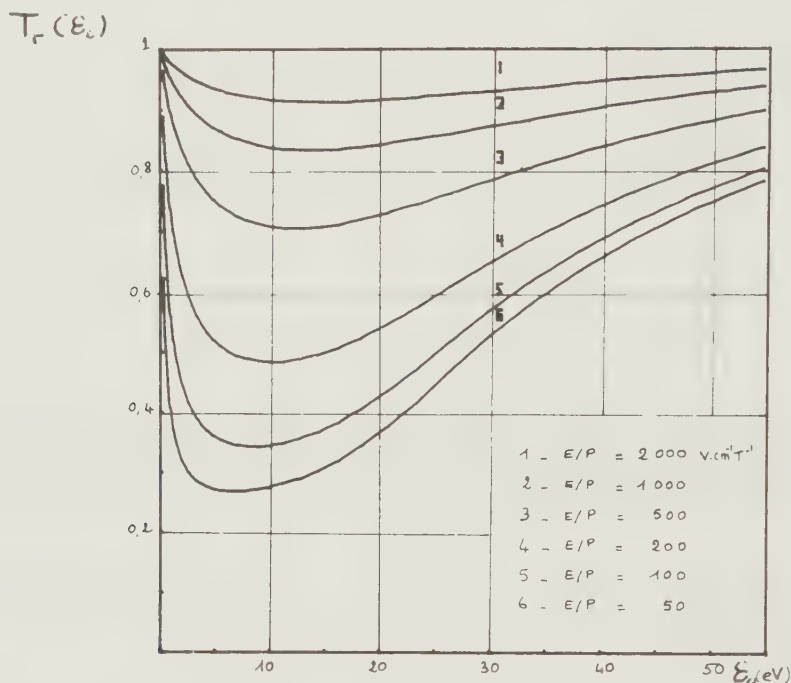


FIGURE 10

L'allure générale des courbes obtenues ne correspond pas aux formules classiques donnant le facteur de transmission qui existent dans la littérature telles que les formules de THOMSON (Th-3) et de VARNEY (Va-2). Ces relations prédisent un comportement à décroissance monotone pour $T_r(\mathcal{E}_0)$, lorsque $\mathcal{E}_0$ croît, avec une limite nulle à l'infini. Je vais donner, dans ce qui suit, l'explication de ce désaccord.

Remarquons en premier lieu l'existence de deux phénomènes distincts dans le comportement des courbes de la figure 10. A mesure que le rapport E/p croît, le facteur de transmission T_r augmente globalement. Cela est dû au fait que, la probabilité de collision diminuant lorsque E/p croît (par suite du caractère décroissant de la section efficace totale de collision), le champ électrique joue un rôle directionnel de plus en plus important et la plus grande partie des électrons est dirigée vers l'avant (cf. paragraphe suivant). Le deuxième phénomène mentionné plus haut est celui de l'existence d'un minimum de la courbe $T_r(\mathcal{E}_0)$ à E/p constant.

Comme on l'a déjà vu au chapitre II, augmenter l'énergie cinétique d'émission revient à déplacer la cathode vers les hautes valeurs de l'énergie du diagramme unique (figure 4). Sur la figure 11, ci-dessous on a représenté ce diagramme avec les différentes cathodes correspondant à des énergies initiales $\mathcal{E}_0$ croissantes, tracées en pointillé. On a hachuré les régions où les électrons peuvent, s'ils n'effectuent pas de collision, revenir à la cathode. Pour $\mu=0$, les électrons ne peuvent revenir à la cathode que sur la caractéristique $\mu=-1$. Autrement dit, la plus grande partie des électrons rebrousse et repart vers l'anode. Le facteur de transmission est extrêmement important conformément à la figure 10. Au fur et à mesure que $\mathcal{E}_0$ croît, les électrons peuvent

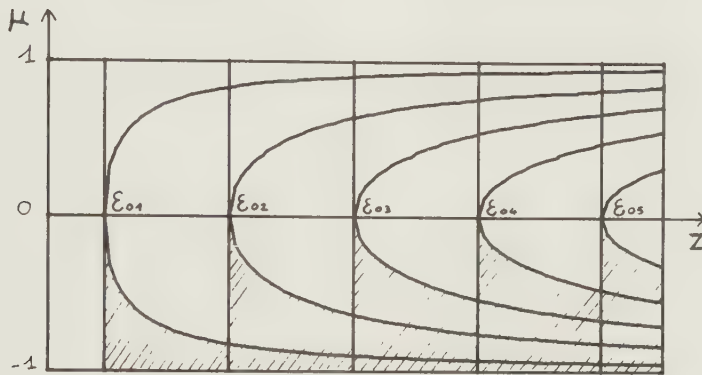


FIGURE 11

de plus en plus facilement revenir à la cathode puisque la région hachurée de la figure 11 s'élargit : le facteur de transmission décroît. Ceci justifie bien l'allure de la figure 10 jusqu'au minimum. Lorsque $\mathcal{E}_0$ devient suffisamment grand la surface de la zone hachurée ne varie pratiquement plus, sa valeur limite étant définie par la surface comprise entre la cathode, l'anode et les axes $\mu=0$ et $\mu=-1$: le facteur de transmission aurait dans ces conditions une valeur constante. Pour expliquer la remontée de T_r , il faut faire intervenir un autre phénomène. En effet, lorsque $\mathcal{E}_0$ croît, par suite de la décroissance de la section efficace totale de collision, la probabilité de collision diminue et beaucoup plus d'électrons sont transmis : le facteur de transmission augmente à nouveau.

Ainsi, on voit maintenant que l'allure des courbes $T_r(\mathcal{E}_0)$ s'explique simplement dès que l'on analyse les influences antagonistes du champ électrique et des collisions. La décroissance et la croissance de $T_r(\mathcal{E}_0)$ trouvent leur justification dans la prédominance d'un effet sur l'autre, au cours du mouvement des particules.

IV.1.2. Variation du facteur de transmission avec le coefficient de réflexion à la cathode.

Si l'on ne fait plus, comme précédemment, l'hypothèse d'une absorption totale des électrons par la cathode et si l'on admet au contraire qu'un certain pourcentage de ceux-ci est renvoyé dans la décharge (on caractérise ce retour par un coefficient de réflexion r compris entre

0 et 1), on obtient le réseau de courbe de la figure 12. Evidemment, le facteur de transmission augmente à la fois en fonction de E/p et du coefficient de réflexion. Un réseau de courbes identiques a été obtenu à partir de résultats expérimentaux par BEKIARIAN, DELCROIX et RICATEAU (figure 13). L'accord entre ces résultats expérimentaux et les calculs effectués ici apporte donc une caution à posteriori à la validité de la méthode de résolution.

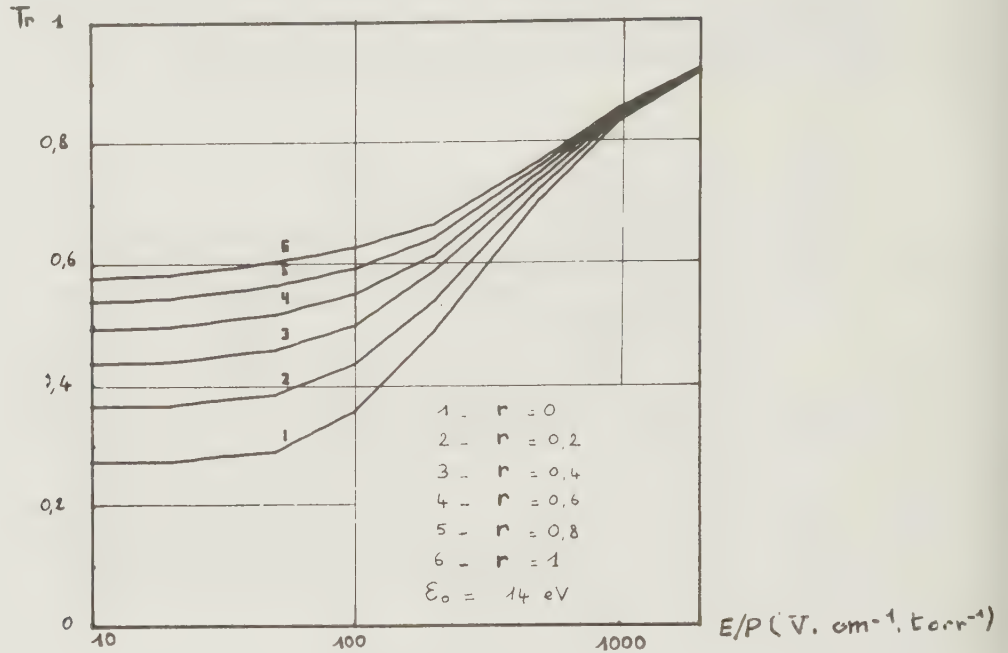


FIGURE 12

VARIATION DU FACTEUR DE TRANSMISSION EN FONCTION
DU COEFFICIENT DE REFLEXION A LA CATHODE.

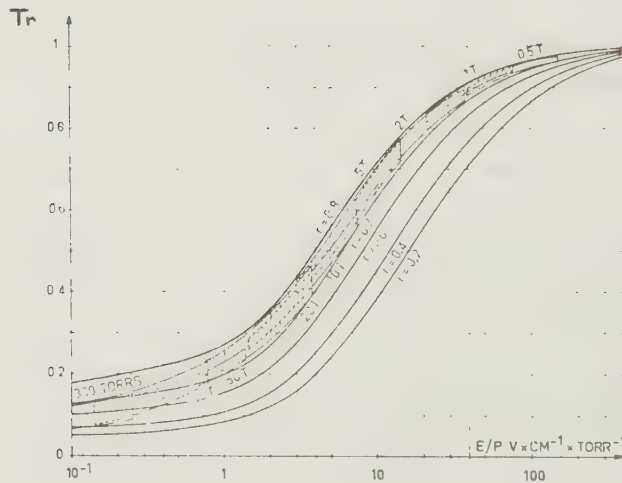


FIGURE 13

IV.2. ETUDE DE LA DISTRIBUTION ANGULAIRE.

Les figures 14 à 18 correspondent à une énergie totale constante et sont classées par ordre des valeurs de E/p croissantes. Pour chaque valeur de E/p , on donne cinq distributions angulaires pour des abscisses de plus en plus éloignées de la cathode. Les distributions angulaires sont tracées en coordonnées polaires. Pour des raisons de commodité, on a normalisé l'ensemble des courbes et on a porté le coefficient de réduction correspondant sur chacune d'elles.

D'un point de vue global, la première constatation est l'aplatissement des courbes au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la cathode. On a un phénomène semblable à mesure que E/p croît. Le nombre d'électrons se dirigeant vers l'arrière est d'autant moins important que l'on est plus éloigné de la cathode ou que le rapport E/p est plus fort. L'évolution de la distribution angulaire en fonction de E/p est particulièrement nette si l'on compare les courbes donnant la répartition à la cathode. Aux faibles valeurs de E/p le retour est important, puis diminue régulièrement lorsque E/p croît pour disparaître complètement lorsque E/p est de l'ordre de 1000 (ce qui correspond bien sûr à l'évolution du facteur de transmission). Un autre point important, et qui interdit définitivement tout développement en série de fonctions sphériques, est la présence de la discontinuité. Il est évident que cette discontinuité est d'autant plus sévère que le nombre d'électrons dirigés vers l'avant est plus important, c'est-à-dire aux forts E/p . C'est bien ce que l'on remarque sur les figures. En revanche lorsque E/p est faible, la discontinuité est moins visible. En fait, comme il est facile de le voir sur les relations (18) et (19), elle s'amortit exponentiellement pour disparaître complètement si E/p est assez bas (figure 14).

En règle générale, on voit bien que, compte tenu des valeurs de E/p qui ont été adoptées ici, l'utilisation des harmoniques sphériques (par référence aux travaux de PARKER et LOWKE) ne se justifie pas.

IV.3. ETUDE DE LA PARTIE ISOTROPE DE LA FONCTION DE DISTRIBUTION.

Le terme source $S^k(z)$ des équations (17), (18) et (19) représente la partie isotrope de la fonction de distribution dans son développement en série de fonctions sphériques. La détermination de $S^k(z)$ conduit immédiatement à celle de la fonction de distribution en énergie des électrons.

Contrairement aux résultats qui précèdent, le calcul de la partie isotrope nécessite la prise en considération de la zone II : la structure de bandes que j'ai introduite plus haut va alors apparaître.

Sur les figures 19 et 20 on a porté, tracées en perspective et en coordonnées semi-logarithmiques les courbes représentatives de la partie isotrope pour des valeurs de E/p de 200 et de $50 \text{ V.cm}^{-1} \cdot \text{Torr}^{-1}$. Le comportement en "creux" et "bosses" de la fonction de distribution y est particulièrement net. Par ailleurs, on remarque également l'élargissement des bandes inférieures et la jonction des deux dernières. Les pics abrupts présents sur les premières bandes correspondent

au maximum des niveaux d'excitation, ils s'adoucissent et tendent à disparaître dans la dernière bande qui est celle d'énergie la plus faible. S'il avait été possible de travailler sur des distances interélectrodes plus grandes, les bandes correspondant aux énergies élevées se seraient de plus en plus amorties pour finalement disparaître et il n'existerait plus de bosse, la fonction de distribution décroissant de manière continue des basses vers les hautes énergies. En fait, il n'existe pas d'impossibilité théorique à l'atteinte de l'état d'équilibre. Les seules difficultés auxquelles on se heurte, sont d'ordre pratique (temps de calcul trop long). On peut toutefois faire un certain nombre de remarques sur les conditions d'approche de cet état.

Revenons pour cela à la fonction $\alpha(y, z, z^*)$ définie par (17b). Si l'on effectue le changement de variable $z = E/E$, on obtient (avec un abus de langage) :

$$\alpha(E, E', E^*) = \exp \left[- H(E, E') \frac{E}{P} \right]$$

avec

$$H(E, E') = N'_0 \int_{E'}^E \frac{\sigma_T(y)}{\mu(y, E^*)} dy, \quad N_0 = N'_0 P$$

Par suite, la probabilité de collision entre z et y ne dépend que du rapport E/P et de l'intervalle d'énergie considéré ($\Delta E = E(y - z)$).

Quand, à E/P constant, E est multiplié par un facteur K , on se retrouve dans la situation précédente en divisant la distance interélectrodes par le même facteur.

Ainsi le point d'équilibre z_e correspondant à E et p donnés s'éloigne de la cathode si le champ diminue et inversement.

Cela signifie qu'il suffit de déterminer le point d'équilibre pour une seule valeur de E/p . La distance d'équilibre, correspondant à un même E/p , mais à des valeurs du champ et de la pression différentes, se déduira de la distance d'équilibre initiale z_e en divisant celle-ci par le facteur qui multiplie la valeur du champ. De manière plus précise, si l'on pose :

$$\frac{E_1}{p_1} = \frac{E_2}{p_2} \quad \text{et} \quad E_2 = K E_1$$

alors :

$$z_{e2} = z_{e1} / K$$

Ces conditions sont en fait la traduction, au niveau microscopique de la loi classique de similitude.

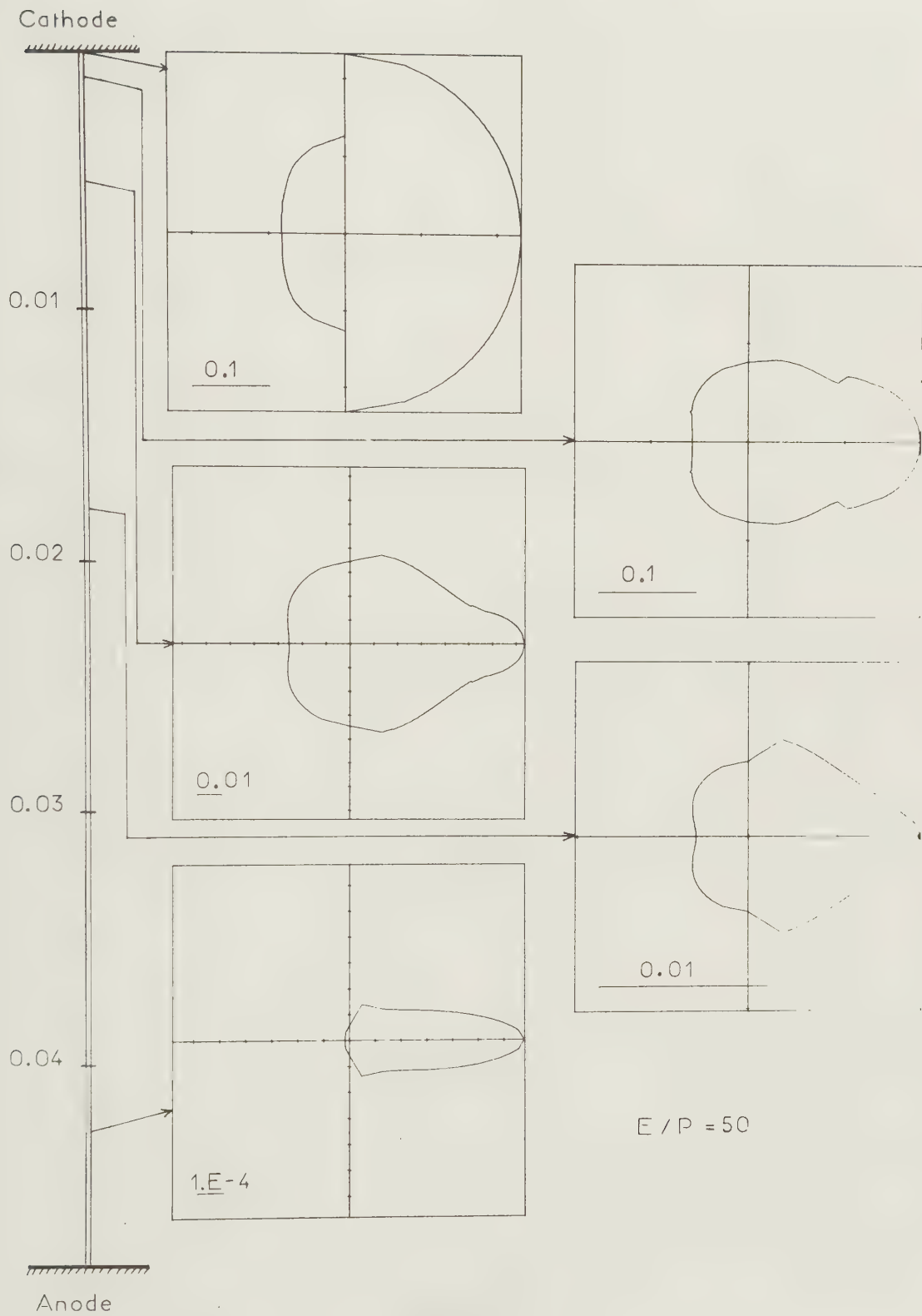


FIGURE 14

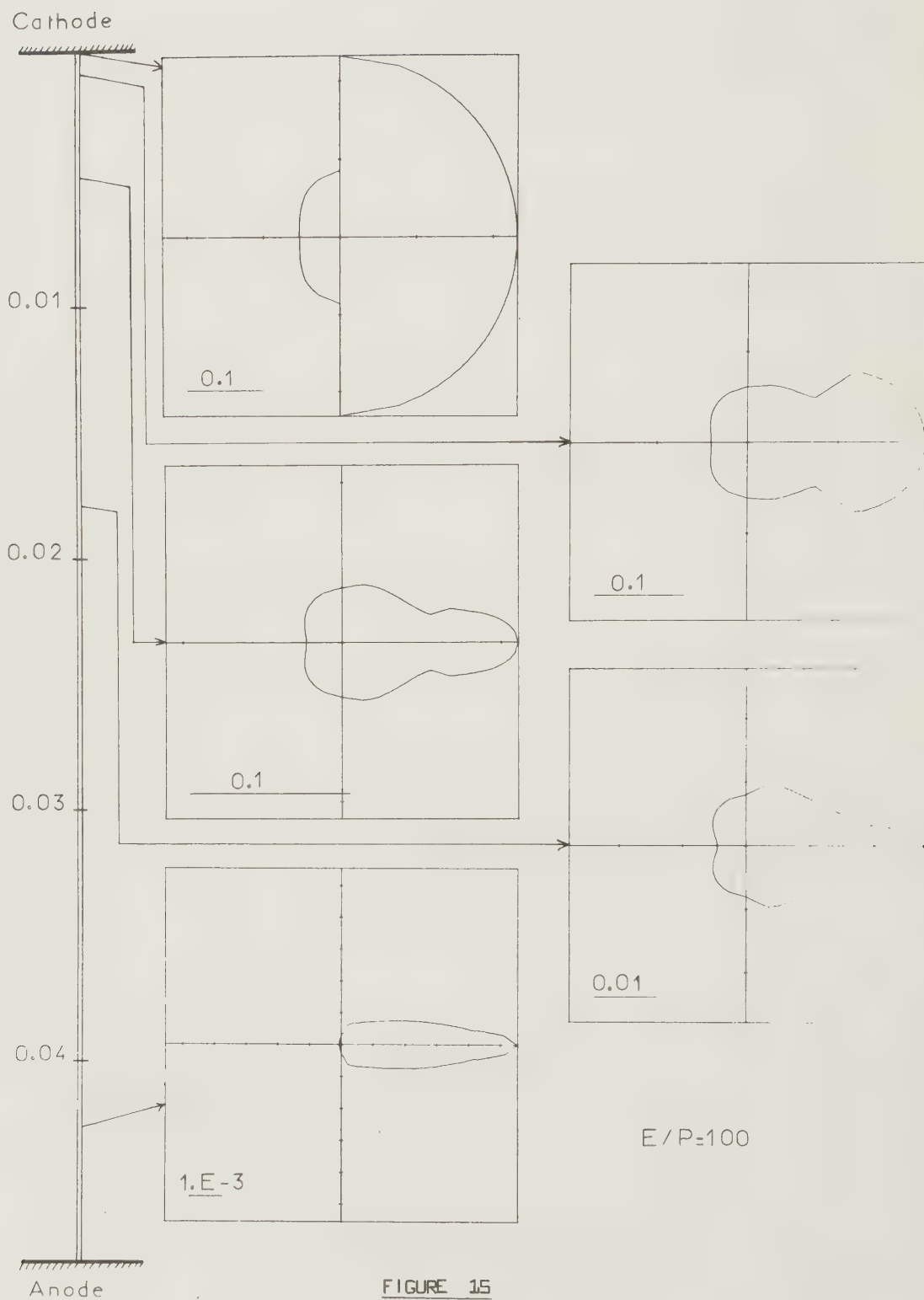
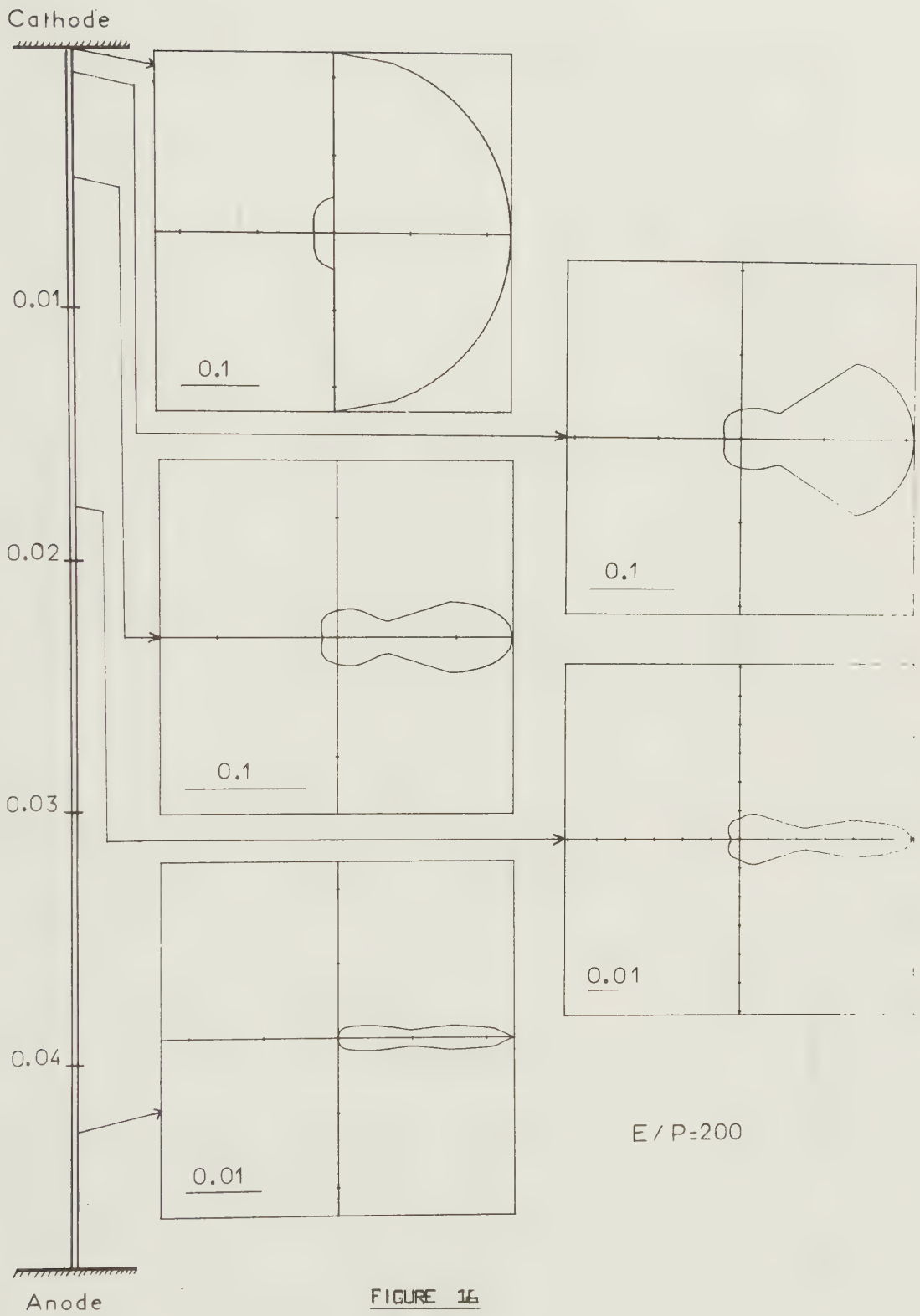
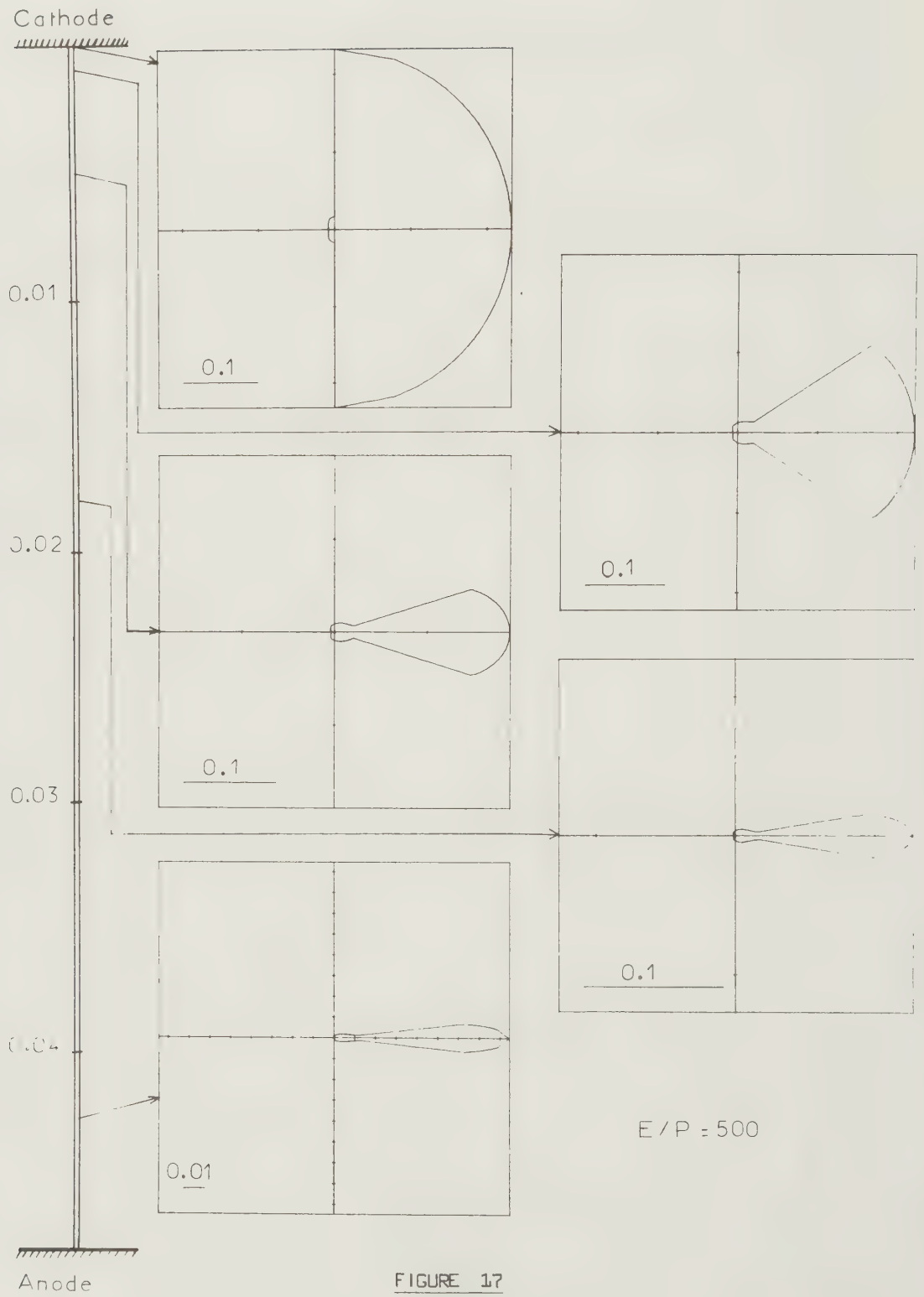


FIGURE 15





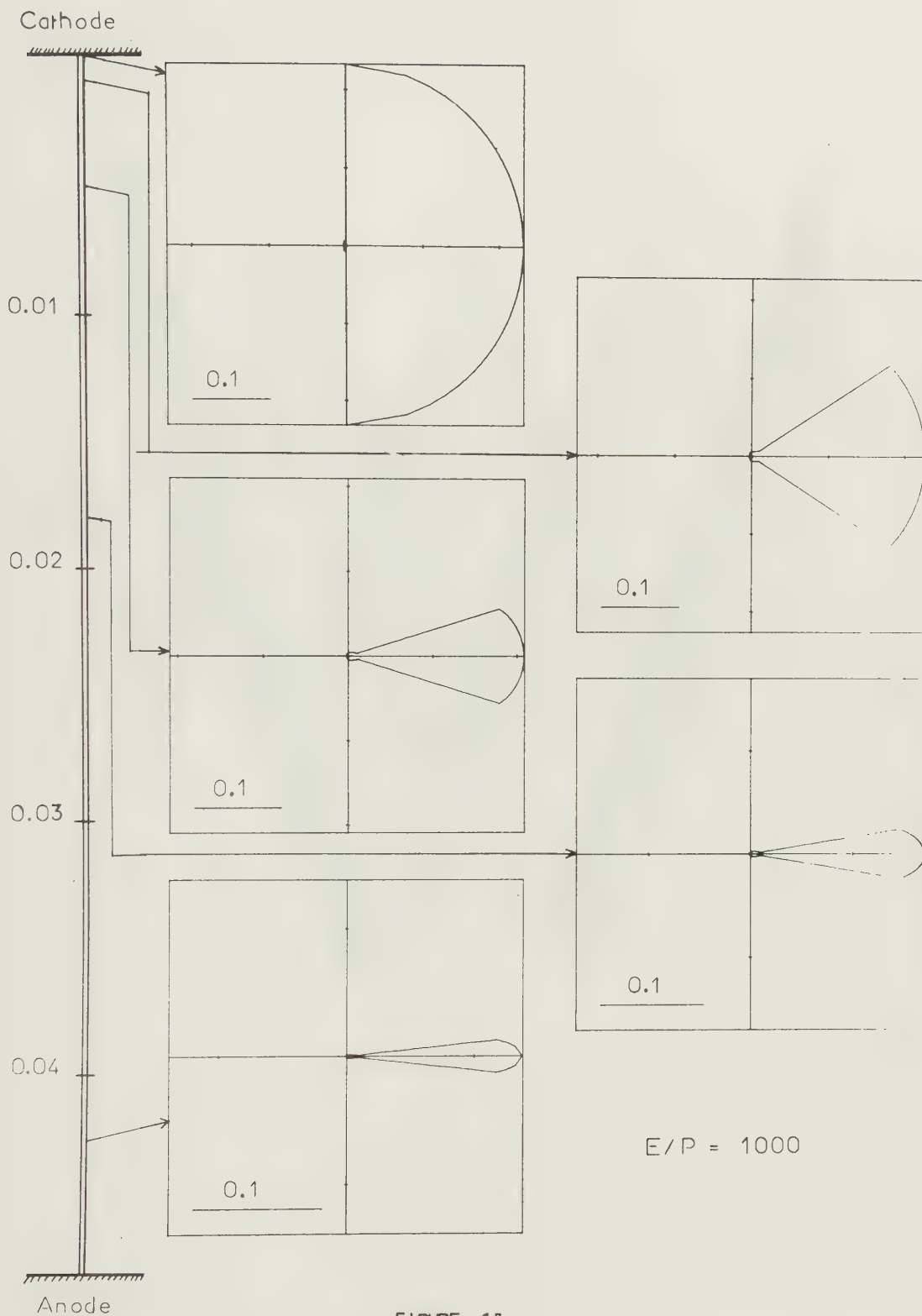


FIGURE 18

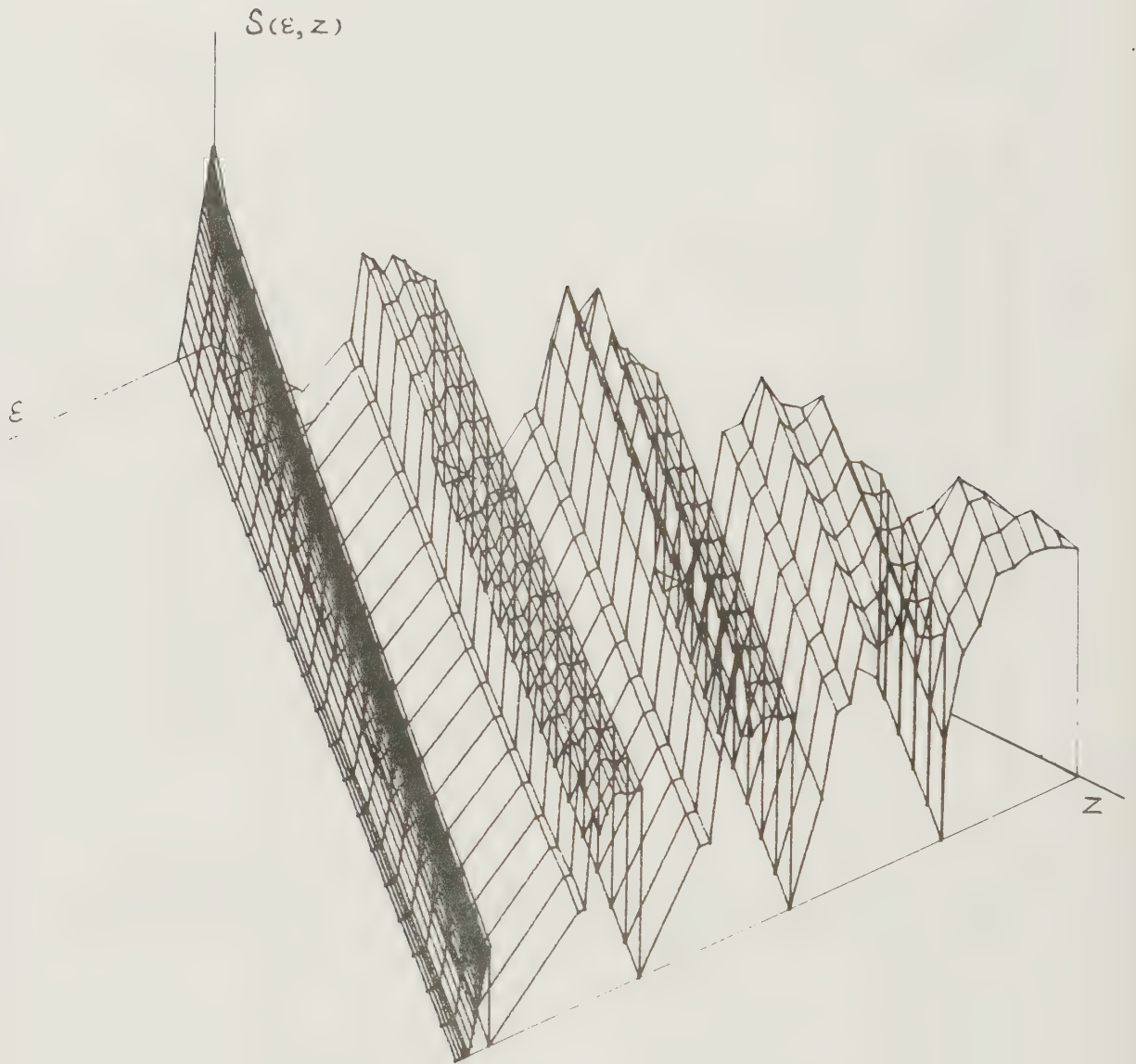


FIGURE 1A

$$E = 1000 \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1}$$

$$E/P = 200 \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{TORR}^{-1}.$$

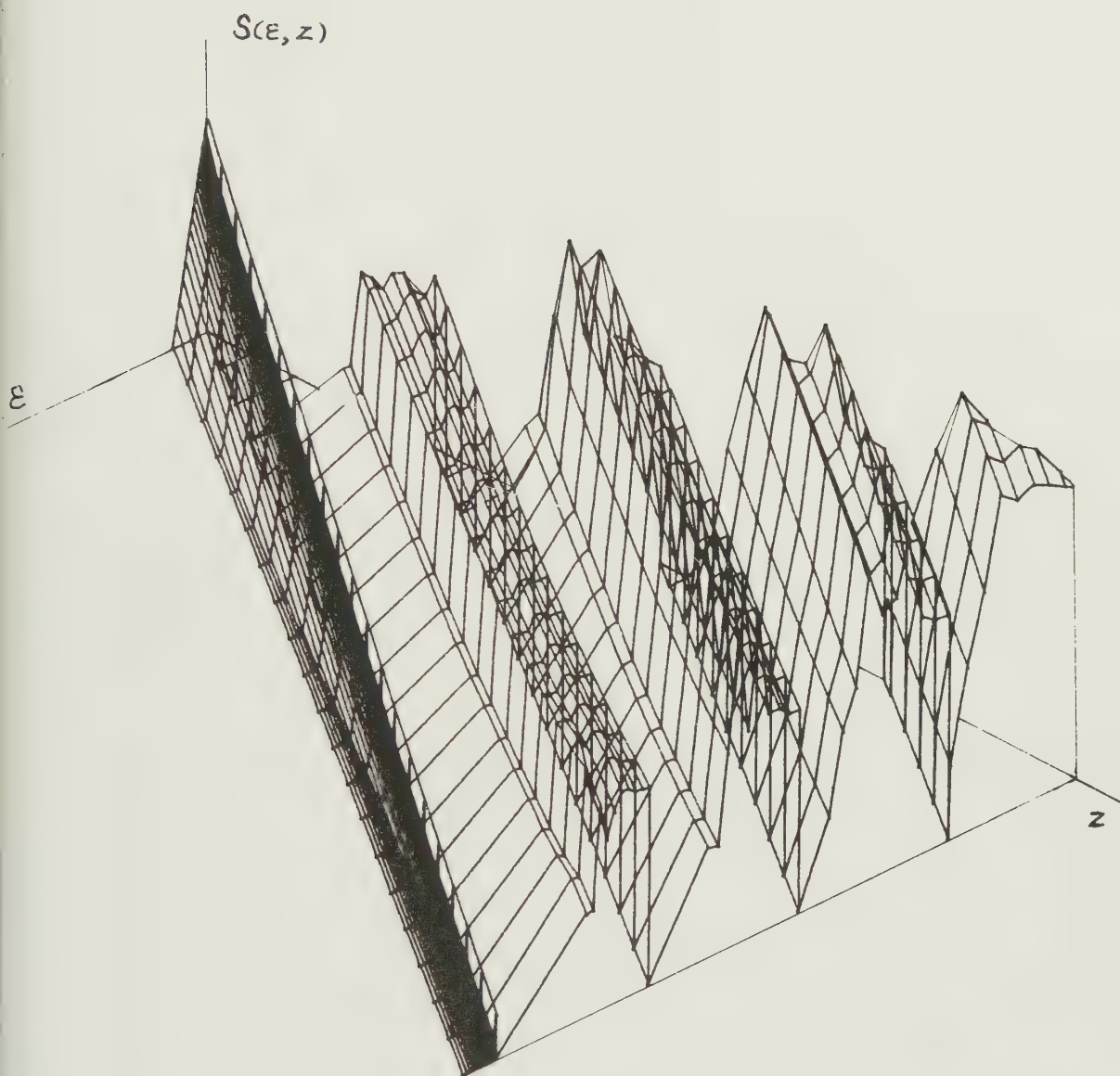


FIGURE 20

$$E = 1000 \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1}$$
$$E/P = 50 \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{TORR}^{-1}.$$



La méthode S_N est un cas particulier de la méthode des ordonnées discrètes. Elle a été essentiellement développée pour l'étude des géométries sphériques et cylindriques. Les caractéristiques principales résident en une discrétisation à la fois sur la variation en position et angulaire (à l'inverse de la méthode des ordonnées discrètes où la discrétisation s'effectue uniquement sur l'angle).

Dans le schéma original de CARLSON (Ca-2), l'hypothèse était faite d'une variation linéaire de la fonction de distribution entre les points d'interpolation dans les deux directions. Dans le cas d'un milieu stationnaire, CARLSON ne se préoccupait pas de la position des points d'interpolation par rapport aux caractéristiques dans le plan (Z, μ) (et qui sont les mêmes que les nôtres dans le plan (E, μ)). Cette propriété était seulement prise en considération au niveau de l'étude des milieux évolutifs (dans le plan (c, z)). Le premier schéma de CARLSON n'était ni conservatif, ni positif, et, sous sa forme initiale la convergence uniforme de la solution discrète vers la solution exacte du problème n'a jamais été prouvée. L'étude de la convergence a été effectuée pour un schéma voisin du schéma initial de CARLSON par KELLER et WENDROFF (Ke-2) dans le cadre d'un milieu évolutif. Dans ce schéma l'influence de la position du point d'interpolation vis à vis des caractéristiques est prise en considération uniquement dans le plan (c, z) .

Une première amélioration de la méthode S_N est apportée par la "discrète S_N méthode" décrite également par CARLSON (Ca-3) dont l'application est déjà plus aisée et dans laquelle on se préoccupe de respecter au maximum, dans l'équation discrétisée, les propriétés physiques du problème envisagé. L'article de base pour l'étude de la "discrète S_N méthode" est celui de LATHROP et CARLSON (La-8). Le schéma discret est obtenu uniquement à partir de considérations physiques (conservation du nombre de particules par exemple). Si, en milieu sphérique, l'équation originale s'écrit :

$$\mu \frac{\partial f(z, \mu)}{\partial z} + \frac{1 - \mu^2}{z} \cdot \frac{\partial f(z, \mu)}{\partial \mu} = - \sigma f(z, \mu) + S(z, \mu)$$

L'équation discrète prend la forme :

$$w_m (A_{i+1} \mu_m F_{i+1,m} - A_i \mu_m F_{i,m}) + \alpha_{m+1/2} F_{i+1/2,m+1/2} - \alpha_{m-1/2} F_{i+1/2,m-1/2} \\ + w_m \sigma_{i+1/2} V_{i+1/2} F_{i+1/2,m} = w_m V_{i+1/2} S_{i+1/2,m}$$

où

$$A_{i+1} = 4\pi z_{i+1}^2 \\ V_{i+1/2} = \frac{4\pi(z_{i+1}^3 - z_i^3)}{3} \\ 2w_m = \mu_{m+1/2} - \mu_{m-1/2}$$

Les coefficients $\alpha_{m+1/2}$ et $\alpha_{m-1/2}$ sont déterminés en imposant la conservation du nombre de particules. On obtient :

$$\alpha_{1/2} = \alpha_{M+1/2} = 0 \quad ; \quad 1 \leq m \leq M \\ \alpha_{m+1/2} - \alpha_{m-1/2} = w_m \mu_m (A_{i+1} - A_i)$$

Dans ces conditions, le schéma ci-dessus vérifie l'équation conservative :

$$A_{i+1} I_{i+1} - A_i I_i + \sigma_{i+1} \overline{F}_{i+1/2} V_{i+1/2} = \overline{S}_{i+1/2} V_{i+1/2}$$

avec

$$I_i = \sum_{m=1}^M w_m \mu_m F_{i,m} \\ \overline{F}_{i+1/2} = \sum_{m=1}^M w_m F_{i+1/2,m} \\ \overline{S}_{i+1/2} = \sum_{m=1}^M w_m S_{i+1/2,m}$$

Les équations ci-contre ont été très souvent utilisées et étudiées depuis l'article de LATHROP et CARLSON, bien que la convergence de la solution discrète n'ait pas été encore prouvée.

Les seules modifications apportées concernent le calcul des $\alpha_{m+1/2}$ et $\alpha_{m-1/2}$ ainsi que la structure des équations auxiliaires qu'il faut ajouter pour que le problème soit parfaitement déterminé. On a :

$$f_{i+1/2,m} = a_{i+1/2} f_{i+1,m} + (1 - a_{i+1/2}) f_{i,m} \quad , \quad \mu > 0 \\ f_{i+1/2,m} = (1 - a_{i+1/2}) f_{i+1,m} + a_{i+1/2} f_{i,m} \quad , \quad \mu < 0 \\ f_{i+1/2,m} = b_m f_{i+1/2,m+1/2} + (1 - b_m) f_{i+1/2,m-1/2}$$

Les problèmes importants se situent au niveau de la détermination des coefficients a_2 et b_2 . On minimise l'erreur de troncature (Re-1), (La-7), en prenant :

$$a_{i+1/2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \frac{z_{i+1} - z_i}{z_{i+1} + z_i}$$

et

$$a_{m+1/2} - a_{m-1/2} = -2\mu_m (\mu_{m+1/2} - \mu_{m-1/2}) \text{ , } a_{M+1/2} = 0$$

$$\mu_m = b_m \mu_{m+1/2} + (1 - b_m) \mu_{m-1/2}$$

$$1 - \mu_m^2 = (1 - b_m) a_{m+1/2} + b_m a_{m-1/2}$$

Une fois connus les points $\mu_{m+1/2}$, $\mu_{m-1/2}$, les relations ci-dessus définissent de proche en proche $a_{m+1/2}$, $a_{m-1/2}$ et b_m et ceci de manière unique.

Dans ces conditions l'erreur de troncature est d'ordre Δz^2 et $\Delta \mu^2$ sauf pour z voisin de zéro où l'erreur de discrétisation en position est d'ordre Δz (cette propriété est due évidemment au comportement des caractéristiques dans le plan (z, μ) au voisinage de $z = 0$, le schéma ne les "serrant" pas suffisamment près). Il existe d'autres schémas dans la littérature quelque peu différents de celui-ci, surtout en ce qui concerne le traitement du terme collision.

Ainsi dans l'article de WENDROFF (We-1) le membre de gauche de l'équation initiale est approché comme ci-dessus mais la méthode des caractéristiques est utilisée comme dans mon travail : une légère erreur de discrétisation est commise dans l'évaluation du terme de gauche alors que je ne commets aucune erreur. En contre partie, la mise en oeuvre de la méthode de WENDROFF est plus aisée mais il n'est pas possible de tenir compte aisément de la discontinuité.

Toutefois, le procédé que j'ai adopté ne peut plus s'employer dans le cas de collisions ions-molécules, et, comme on va le voir dans l'appendice suivant, le seul recours réside dans le schéma de LATHROP et CARLSON.

Au cours des collisions ion-atome, les échanges d'énergie sont importants et il est évident que l'on ne peut plus conserver l'opérateur du gaz de LORENTZ parfait ni, par la suite, la méthode de résolution qui a été adoptée dans ce travail. Par ailleurs, contrairement aux électrons, les collisions inélastiques ont en général une influence nettement plus faible sur la fonction de distribution que les collisions élastiques. C'est donc l'opérateur (38) de la première partie qu'il faudra utiliser comme terme de gain. L'étude d'un milieu hétérogène nécessite l'explicitation de l'équation le long des caractéristiques d'énergie totale constante comme dans le cas des électrons. Le membre de gauche de l'équation de BOLTZMANN présente une structure identique dans les deux cas. Dans cet appendice, pour simplifier les notations, je ne m'intéresserai qu'au cas homogène (on sait que l'équation prend une forme très proche dans le cas hétérogène lorsqu'on l'explicité le long de la caractéristique d'énergie totale constante). Alors si la fonction de distribution est exprimée en fonction de l'énergie cinétique ϵ , il vient dans le cas des seules collisions élastiques :

$$\epsilon \left[\mu \frac{\partial f(\epsilon, \mu)}{\partial \epsilon} + \frac{1-\mu^2}{\epsilon} \cdot \frac{\partial f(\epsilon, \mu)}{\partial \mu} \right] = -\sigma(\epsilon) f(\epsilon, \mu) + \frac{(m+M)^2}{4\pi m M} \cdot \frac{1}{\epsilon} \int_{\epsilon}^{\left(\frac{m+M}{M-m}\right)^2 \epsilon} \sigma(\epsilon') f(\epsilon, \mu') d\epsilon' d\varphi^* = -\sigma(\epsilon) f(\epsilon, \mu) + S(\epsilon, \mu) \tag{A2-1}$$

avec

$$\mu' = \mu \mu^* + (1-\mu^2)^{1/2} (1-\mu^{*2})^{1/2} \cos \varphi^*$$

$$\mu^* = \frac{(m+M) v^2 - (M-m) v'^2}{2 m v v'}$$

Le membre de gauche de l'équation (A2-1) peut être discrétisé en utilisant les techniques exposées dans l'appendice I et en définissant l'ensemble des points $\mu_{m+1/2}$ par :

$$-1 < \mu_{3/2} < \mu_{m+1/2} < \dots < \mu_{M+1/2} < 1$$

On désigne alors le membre de gauche discret de (A2-1) par :

$$E. \bar{L}(f)$$

Le terme de gain présente une double intégration en φ^* et ε' . L'intégration en φ^* s'élimine simplement en supposant que la fonction de distribution admet une variation linéaire entre deux points d'interpolation $\mu_{m-1/2}$, $\mu_{m+1/2}$. Alors, si l'on pose :

$$f(\varepsilon, \mu) = \frac{\mu - \mu_{m-1/2}}{\Delta\mu} f_{m+1/2}(\varepsilon) + \frac{\mu_{m+1/2} - \mu}{\Delta\mu} f_{m-1/2}(\varepsilon) \quad (A2-2)$$

avec $\Delta\mu = \mu_{m+1/2} - \mu_{m-1/2}$

et si l'on porte (A2-2) dans le terme de gain $S(\varepsilon, \mu)$ de (A2-1), il vient :

$$S(\varepsilon, \mu_{m+1/2}) = \sum_{k=1}^M \int_{\varepsilon}^{\left(\frac{m+M}{M-m}\right)^2 \varepsilon} \omega_{m+1/2, k+1/2}(\varepsilon, \varepsilon') f_{k+1/2}(\varepsilon') d\varepsilon' \quad (A2-3)$$

avec :

$$\omega_{m+1/2, k+1/2}(\varepsilon, \varepsilon') \geq 0$$

$$\sum_{k=1}^M \omega_{m+1/2, k+1/2}(\varepsilon, \varepsilon') = \pi$$

et surtout :

$$\omega_{m+1/2, k+1/2}(\varepsilon, \varepsilon) = \pi \delta(\varepsilon, \varepsilon) \delta_{m+1/2, k+1/2} \quad (A2-4)$$

Compte tenu de la discrétisation en énergie du membre de gauche le terme de gain (A2-3) s'écrit, centré au point $k+1/2$:

$$S(\varepsilon^{k+1/2}, \mu_{m+1/2}) = \frac{1}{2} \left[S(\varepsilon^k, \mu_{m+1/2}) + S(\varepsilon^{k+1}, \mu_{m+1/2}) \right] \quad (A2-5)$$

Les ε^i étant définis par :

$$\varepsilon^i = i \Delta\varepsilon \quad ; \quad 1 \leq i \leq I$$

et $\Delta\varepsilon$ étant construit de manière à ce que l'intégration numérique en ε dans (A2-3) nécessite N points. Alors, si l'on utilise une méthode du type trapèze, il vient , par exemple :

$$S_i(\mu_{m+1/2}) = \sum_{\ell=i}^{i+N} \left\{ \sum_{k=1}^M \omega_{m+1/2, k+1/2}^{i\ell} f_{k+1/2}^{\ell} \right\} \quad (A2-6)$$

avec une relation identique pour $S_{i+1}(\mu_{m+1/2})$

On a posé :

$$\omega_{m+1/2, k+1/2}^{i\ell} = \omega_{m+1/2, k+1/2}(\varepsilon^i, \varepsilon^\ell) \quad (\text{A2-7})$$

Par suite, compte tenu de (A2-4), l'équation discrétisée s'écrit :

$$\begin{aligned} E. \bar{L} f = & -\sigma_{i+1/2} f_{m+1/2}^{i+1/2} + \frac{\pi}{2} \gamma(\varepsilon^i, \varepsilon^i) \Delta\varepsilon f_{m+1/2}^i + \frac{\pi}{2} \gamma(\varepsilon^{i+1}, \varepsilon^{i+1}) \Delta\varepsilon f_{m+1/2}^{i+1} \\ & + \sum_{\ell=i+1}^{i+N} \left\{ \sum_{k=1}^M \omega_{m+1/2, k+1/2}^{i\ell} f_{k+1/2}^\ell \right\} + \sum_{\ell=i+2}^{i+N+1} \left\{ \sum_{k=1}^M \omega_{m+1/2, k+1/2}^{i+1, \ell} f_{k+1/2}^\ell \right\} \quad (\text{A2-8}) \end{aligned}$$

La forme discrète (A2-8) ne nécessite pas de méthode itérative à l'inverse des électrons.

En effet, la relation (A2-4) permet d'extraire du terme de gain la composante inconnue qui s'intègre alors dans le terme de dépopulation en définissant une section efficace. La partie résiduelle du terme de gain est connue puisque, les molécules du gaz étant supposées immobiles avant le choc, les ions ne peuvent que perdre de l'énergie. Le calcul s'effectue alors des hautes vers les basses valeurs de l'énergie après avoir défini comme pour les électrons une énergie maximale des ions dans la décharge.

L'inconvénient de cette méthode est d'imposer un stockage permanent des fonctions $f_{k+1/2}^\ell$ correspondant au domaine d'intégration en énergie du terme de gain $S(\varepsilon^{i+1/2}, \mu_{m+1/2})$. Ceci mis à part sa mise en oeuvre semble relativement aisée.

A P P E N D I C E I I I - 3

PROGRAMME DE RESOLUTION

XXXXX

Le programme dont la liste suit permet la détermination des fonctions de distributions électroniques dans l'hélium. Il a été écrit pour un ordinateur CONTROL DATA 6600 sous SCOPE 3-4. Le compilateur employé est le compilateur FTN 4-0 en version optimisée.

```

COMMON /SEXY/EP51(3),A1(3),R1(3),SIGE(50),SIGT(50),RS(50)
COMMON /DONNEE/L,W,P,E,EM,WMIN,WMAX,N,LIMIT
COMMON /SEXY/EP51(3),A1(3),R1(3),SIGE(50),SIGT(50),RS(50)
EQUIVALENCE (PACKA(1),NA),(PACKA(2),XA(1)),(PACKA(52),SA(1)),
S(PACKA(102),SPLA(1))
EQUIVALENCE (PACKB(1),NB),(PACKB(2),XB(1)),(PACKB(52),SB(1)),
S(PACKB(102),SPLB(1))
SEP(EPS)=A1(K)*EPS/(B1(K)*EPS**2)
DO 11 I=1,N
11 SS(I)=0.
DO 66 K=1,3
DEPS=AT(IE)*EPS1(K)
DO 22 J=1,IE
IK=IE-J+1
IF (WT(IK)*GE,DEPS) GO TO 25
CONTINUE
22 IF (DEPS.EQ.0.) GO TO 77
IF (ABS((WT(IK)-DEPS)/DEPS).LT.1.E-12) GO TO 77
IF (ABS((WT(IK)-DEPS)/DEPS).LT.1.E-12) GO TO 99
GO TO 6A
25 IF (K8(IK).NE.(K8(IK+1)-1)) GO TO 24
CALL READ45(2,PACK8,JEN+1,IK)
CALL READ45(2,PACK8,JEN+1,IK+1)
EPS=WT(IK)-DEPS/(WT(IK)-(WT(IK+1)-WT(IK+1)))
EPS=DEPS-WT(IK+1)/(WT(IK)-(WT(IK+1)-WT(IK+1)))
DO 44 I=1,N
X1=(EPS(I)-W)/E
44 SS(I)=SS(I)+(EPS(I)*EPS1(K)+A1(K)/(B1(K)*EPS(I)**2)*EXP(EPS
*FS(XA,SA,SPLA,X1,NA)*EPS*WFS(XB,SB,SPLB,X1,NB)))
66 CONTINUE
55 SS(I)=SS(I)*P/SIGT(I)
RETURN IADD
99 IK=IK+1
77 CALL READ45(2,PACK8,JEN+1,IK)
DO 88 I=1,N
X1=(EPS(I)-W)/E
88 SS(I)=SS(I)+(EPS(I)*EPS1(K)+A1(K)/(B1(K)*EPS(I)**2)*EXP(FS(XB
*SSH,SPLA,X1,NB)))
GO TO 66
END

```

```

IF (IT.EQ.1) FIN=1.D0
M=N-1
D=0.D0
IF (IT.EQ.1) D=6.*(Y(2)-Y(1))/(X(2)-X(1))-DY0/(X(2)-X(1))
W(1)=F1*0.500
S(1)=D/2.D0
DO 11 I=2,M
C=(X(I+1)-X(I))/(X(I+1)-X(I-1))
A=1.D0-C
D=6.*(Y(I+1)-Y(I))/(X(I+1)-X(I))-(Y(I)-Y(I-1))/(X(I)-X(I-1)))
1/(X(I+1)-X(I-1))
P=D*A*W(I-1)+2.D0
W(I)=C/P
11 S(I)=(D-A*S(I-1))/P
D=0.D0
IF (IT.EQ.1) D=6.*(DYN-(Y(N)-Y(N-1))/(X(N)-X(N-1)))/(X(N)-X(N-1))
S(N)=(D-FIN*S(N-1))/(2.D0+FIN*W(N-1))
DO 22 K=1,M
I=N-K
22 S(I)=S(I)+W(I)*S(I+1)
RETURN
END

```

```

FUNCTION FS(X,Y,S,X1,N)
DIMENSION X(N),Y(N),S(N)
IF (X1.LE.X(1)) GO TO 33
DO 22 J=2,N
I=J
IF (X1.LE.X(J)) GO TO 2
22 CONTINUE
FS=0.
RETURN
2 J=I-1
Z=X1-X(J)
IF (Z.EQ.0.) GO TO 5
Z1=X(I)-X1
D=X(I)-X(J)
FS=S(J)*(Z1**3)/(6.*D)+S(I)*(Z**3)/(6.*D)+(Y(I)/D-S(I)*D/6.)
1*Z*(Y(J)/D-S(J)*D/6.)**21
RETURN
33 IF (X1.NE.X(1)) GO TO 44
FS=Y(1)
RETURN
44 WRITE (6,7)
WRITE(6,12) X1
12 FORMAT(1X,F15.8)
RETURN
5 FS=Y(J)
RETURN
7 FORMAT (1H ,27HX1 EXTERIEUR A L'INTERVALLE )
END

```

```

BLOCK DATA
REAL L
COMMON /DONNEE/L,W,P,E,EM,WMIN,WMAX,N,LIMIT
COMMON /SEXY/EP51(3),A1(3),R1(3),SIGE(50),SIGT(50),RS(50)
DATA P,E,EM,WMIN,WMAX/ 5.,1000.,0.5*0.3,100./
DATA N,LIMIT /50,200/
DATA EP51,A1/19.8,21.45,24.46,0.25,1850.,0.4900.,0.109,68.8,172./
END

```

```

SUBROUTINE DEPOP(EPS,N)
COMMON /SEXY/EP51(3),A1(3),R1(3),SIGE(50),SIGT(50),RS(50)
COMMON /DONNEE/L,W,P,E,EM,WMIN,WMAX,N,LIMIT
DIMENSION EPS(N)
SIGT(I)=SIGE(I)=26.*EXP(-0.04*EPS(I))
DO 33 I=1,N
NO 11 K=1,3
IF (EPS(I).LE.EPS1(K)) GO TO 22
11 SIGT(I)=SIGT(I)+A1(K)*(EPS(I)-EPS1(K))/(B1(K)*(EPS(I)-EPS1(K))**2)*
22 RS(I)=SIGE(I)/SIGT(I)
SIGE(I)=SIGE(I)*P
33 SIGT(I)=SIGT(I)*P
RETURN
END

```

```

BLOCK DATA
COMMON /DONNEE/L,W,P,E,EM,WMIN,WMAX,N,LIMIT
COMMON /SEXY/EP51(3),A1(3),R1(3),SIGE(50),SIGT(50),RS(50)
DATA P,E,EM,WMIN,WMAX/ 5.,1000.,0.5*0.3,100./
DATA N,LIMIT /50,200/
DATA EP51,A1/19.8,21.45,24.46,0.25,1850.,0.4900.,0.109,68.8,172./
END

```


QUATRIEME PARTIE

SIMULATION DU MOUVEMENT DES ELECTRONS PAR UNE METHODE
DU TYPE MONTE CARLO

XXXXX

Comme je l'ai mentionné au début de ce mémoire, l'étude effectuée à partir du formalisme de l'équation de BOLTZMANN ne permet pas de rendre compte de la nature fluctuante des phénomènes. Il n'est ainsi pas possible d'obtenir des informations sur le comportement des particules à l'échelle d'un libre parcours ou de quelques libres parcours. C'est l'existence de ce problème qui m'a conduit à adopter une technique de simulation sur ordinateur.

Cependant, la présence du champ électrique introduit des difficultés certaines en particulier lors du traitement des libres parcours (modification de la distribution de ces derniers et courbure des trajectoires).

Malgré cela, de nombreuses informations peuvent être obtenues à l'aide de la simulation directe qui constitue la première partie de ce qui suit. En particulier la détermination de $g(\xi)$ me permet au cours du chapitre V d'effectuer une simulation rapide de la croissance électronique.

Dans un premier temps, après une introduction bibliographique (chapitre I), destinée à donner un bref aperçu des principaux travaux utilisant une technique de simulation pour l'étude du mouvement des électrons dans un gaz soumis à un champ électrique, je détaille systématiquement dans le chapitre II, les différentes étapes du calcul ; les résultats sont exposés dans les chapitres III et IV. Lors de cette étude, j'assimile l'ionisation à une excitation, c'est-à-dire que je ne tiens pas compte de la multiplication électronique. Néanmoins, les fonctions $g(z)$ sont obtenues avec exactitude dans ce modèle si l'on reste dans la phase de croissance où la charge d'espace peut être négligée.

Au chapitre V, je calcule le coefficient $\alpha(z)$, représentant la probabilité conditionnelle d'ionisation, à partir des fonctions $g(z)$ lissées. J'étudie ensuite les fluctuations de la croissance de la population électronique. Je compare alors les modèles proposés pour $\alpha(z)$ au modèle que j'obtiens.

CHAPITRE I

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE



Le premier travail dans ce domaine est dû à YARNOLD (Ya-2). Il a adopté la méthode de simulation pour une analyse du mouvement des électrons dans un gaz soumis à un champ électrique uniforme et constant, lorsque n'interviennent que des collisions élastiques. Une discussion de cet article est faite par LOEB (Lo-1) ; il montre qu'adoptant les hypothèses qui conduisent à la loi de distribution de DRUYVESTEYN, YARNOLD aboutit à une loi du type de TOWNSEND. Cela permet de mettre en doute la validité des résultats de YARNOLD. L'erreur est expliquée par WIJSMAN (dans une étude non publiée) qui montre que YARNOLD a commis une faute importante dans le calcul de la variation d'énergie de l'électron sur un libre parcours. (Le détail du calcul de cette variation a été publié par BRAGLIA (Br-2) dans un article récent). De plus YARNOLD utilise la distribution classique des libres parcours.

Excepté ces deux points, la méthode proposée par YARNOLD est intéressante. En particulier il effectue convenablement le calcul de la perte d'énergie au cours d'un choc élastique pour un modèle du type "sphères dures". Par ailleurs, le choix de l'angle Θ et de l'angle azimutal φ est effectué simplement dans le cadre de l'hypothèse de diffusion isotrope. Dans un article ultérieur (Ya-2), consacré au mouvement des ions positifs, l'erreur sur la variation d'énergie n'apparaît pas et les résultats obtenus sont plus corrects. D'autre part, YARNOLD tient compte de la courbure des trajectoires ioniques entre deux collisions mais de façon très rudimentaire. Il utilise encore la distribution classique des libres parcours.

HAMMING fait une étude de Monte-Carlo qui s'intègre dans un article beaucoup plus général de WANNIER (Wa-2) relatif à l'étude du mouvement des ions. Malheureusement la méthode employée est assez peu explicite. HAMMING suit un seul électron jusqu'à 10^4 collisions ; il utilise aussi la loi classique des libres parcours ; mais aucune mention n'est faite de la façon dont il traite les trajectoires. Pour augmenter la rapidité des calculs, il fait un échantillonnage préalable en utilisant des cartes perforées.

La première tentative pour essayer de tenir compte de la modification de la distribution des libres parcours est due à ITOH et MUSHA (It-1), qui généralisent les travaux de YARNOLD en incluant les collisions inélastiques. Comme ils ne s'intéressent qu'à des valeurs de E/p élevées, ils négligent la variation d'énergie de l'électron au cours des chocs élastiques. Leur objectif étant de déterminer la distribution en énergie à l'équilibre, ils suivent la trajectoire d'un seul électron pendant un temps t suffisamment élevé, et stockent les composantes de la vitesse de cet électron à des intervalles de temps égaux $t + \Delta t$, $t + n \cdot \Delta t$; cependant le traitement rigoureux consisterait à effectuer un grand nombre d'histoires et à suivre dans chacune les trajectoires de tous les électrons créés par ionisation. ITOH et MUSHA supposent qu'il y a identité entre les deux méthodes (hypothèse d'ergodicité). Afin de bien comprendre la méthode adoptée par ITOH et MUSHA pour déterminer les libres parcours λ , il convient de rappeler que la distribution classique des libres parcours dont la densité de probabilité est donnée par :

$$\Pi(\lambda) d\lambda = \frac{1}{\langle \lambda_T \rangle} \exp(-\lambda / \langle \lambda_T \rangle) d\lambda$$

$$\langle \lambda_T \rangle = 1 / N_0 \sigma_T$$

n'est valable que si l'énergie de la particule considérée ne varie pas entre deux collisions. Cependant, dans le cas contraire, il est possible d'appliquer la loi en se limitant à une tranche d'énergie suffisamment faible de telle sorte que la variation de libre parcours puisse être considérée comme négligeable. Désignons par $\Delta\lambda$ la fraction de libre parcours correspondant à cette tranche d'énergie; alors, la probabilité $\mathcal{P}(\Delta\lambda)$ pour qu'un libre parcours soit inférieur ou égal à $\Delta\lambda$, s'écrit :

$$\mathcal{P}(\Delta\lambda) = 1 - \exp(-\Delta\lambda / \langle \lambda_T \rangle)$$

Le choix d'un nombre au hasard γ compris entre 0 et 1 permet de décider s'il y a ou non choc le long de $\Delta\lambda$. Lorsque la réponse est négative, on avance d'un nouvel intervalle $\Delta\lambda$, on effectue un nouveau tirage de γ et ainsi de suite jusqu'à ce que la réponse soit positive.

Dans l'article d'ITOH et MUSHA l'intervalle $\Delta\lambda$ est pris systématiquement égal à $\langle \lambda_T \rangle / 10$, ce qui entraîne une probabilité $\mathcal{P}(\Delta\lambda)$ constante et approximativement égale à 0,1.

Cette méthode, bien que séduisante dans son principe conduit sous cette forme à d'importantes erreurs; j'indiquerai plus loin leur cause ainsi que les modifications qu'il convient d'apporter pour rendre le traitement correct.

ITOH et MUSHA donnent des valeurs du premier coefficient de TOWNSEND α et de la vitesse de dérive V_d .

GOLDSTEIN et SWIGERT (Go-2), (Go-3), (Sw-1) ont également appliqué une méthode de simulation à un problème assez différent du mien, qui est celui de la diode plane en présence d'une charge d'espace. Ils suivent la progression d'un flux d'électrons initialement thermoionique en admettant (du fait des faibles valeurs de E/p utilisées) que seules les collisions élastiques interviennent. Ils négligent enfin, ce qui est beaucoup plus contestable, la variation de l'énergie de l'électron au cours d'un choc. Le champ électrique est fortement hétérogène par suite de l'influence

de la charge d'espace et sa variation entre les électrodes est déduite par résolution numérique de l'équation de Poisson. Pour tenir compte de la modification de la distribution des libres parcours, l'espace entre les électrodes est divisé en tranches. Pour une énergie initiale donnée $\mathcal{E}_0$, et si l'on admet qu'il n'y a aucune perte d'énergie par collision élastique l'énergie $\mathcal{E}$ en un point z est égale à $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + Ez$. Soient z_i et z_{i+1} les abscisses des plans limitant la tranche i ; la méthode de GOLDSTEIN consiste à prendre une énergie de référence, pour la tranche i définie par :

$$\mathcal{E}^{i,i+1} = E(z_{i+1} - z_i) / 2$$

Alors, le libre parcours moyen est constant dans chaque tranche et égal à $\lambda(\mathcal{E}^{i,i+1})$. Si le choc ne se produit pas dans la tranche i , on passe à l'intervalle suivant, et on opère de la même façon.

THOMAS et THOMAS (Th-1) ont effectué un calcul de Monte-Carlo appliqué au cas d'une décharge stationnaire dans le néon. Ils adoptent le traitement d'ITOH et MUSHA en ce qui concerne la distribution des libres parcours. Mais ils réfutent l'hypothèse d'ergodicité faite par ITOH et MUSHA (l'influence des électrons créés par ionisation interdisant à leur sens ce mode de traitement). Dans leurs calculs, ils admettent que toutes les directions de la vitesse d'un électron après un choc, sont également probables. Cette hypothèse simplifie considérablement la simulation. Elle peut être substituée à l'hypothèse d'anisotropie à condition de modifier la section efficace de collision élastique : il suffit alors de garder constante la section efficace de transfert pour la quantité de mouvement.

THOMAS et THOMAS font une estimation du facteur de transmission T_r en admettant que si l'énergie initiale de l'électron est suffisamment faible (inférieure au premier seuil d'excitation), un électron ne peut plus revenir à la cathode dès qu'il a effectué une collision inélastique. On a vu au cours de la troisième partie pourquoi il en est effectivement ainsi, tant que l'énergie initiale de l'électron est inférieure ou égale au premier seuil d'excitation. Ils obtiennent le facteur de transmission en calculant le rapport du nombre d'électrons qui effectuent une collision inélastique, au nombre d'électrons émis.

Ce traitement interdit en principe le calcul de T_r pour des énergies initiales élevées ($\mathcal{E} > \mathcal{E}_1$), ainsi que pour des valeurs faibles du rapport E/p car alors le temps de calcul devient trop important. THOMAS et THOMAS, comparant leurs résultats aux valeurs fournies par la formule de THOMSON (Th-3), trouvent un désaccord assez important (de l'ordre de 20%), sauf pour de faibles valeurs de E/p . En fait, la formule de THOMSON ne s'applique que si les particules éjectées de la cathode ont une distribution maxwellienne ce qui n'est absolument pas le cas ici.

En ce qui concerne la simulation de la décharge stationnaire, THOMAS et THOMAS tiennent compte des deux électrons créés à chaque ionisation et suivent chacune de leurs trajectoires.

Malheureusement, ils ne peuvent guère considérer qu'une centaine d'électrons (de l'ordre de cinq générations). D'autre part, THOMAS et THOMAS affirment que la distribution en énergie des électrons après chaque ionisation n'a pas d'influence sur les paramètres macroscopiques. Dans ces conditions, ils répartissent arbitrairement l'énergie résiduelle dans un rapport 1/9.

La détermination des paramètres macroscopiques est effectuée à partir des formules classiques, valables lorsque les électrons sont en équilibre avec le champ électrique. Il est donc important de déterminer avec précision la distance minimale à partir de laquelle les électrons sont en équilibre. C'est ce que THOMAS et THOMAS ont fait dans un premier temps en calculant la variation de l'énergie moyenne de l'électron en fonction de son éloignement de la cathode.

Les paramètres calculés sont l'énergie moyenne, le premier coefficient de TOWNSEND, la mobilité des électrons. Les résultats obtenus par la méthode de Monte-Carlo sont en assez bon accord avec les valeurs que l'on peut trouver dans la littérature, où les différents paramètres sont déterminés à partir de l'équation de Boltzmann.

On peut remarquer en conclusion que le problème de la distribution classique des libres parcours n'est résolu dans aucun des articles ci-dessus. Je proposerai donc dans ce qui suit une méthode qui me permettra de tenir compte de manière plus satisfaisante de l'influence de la variation d'énergie d'un électron sur la distribution des libres parcours.

CHAPITRE II

METHODE DE CALCUL

XXXXX

II.1. ETUDE DU MOUVEMENT LIBRE DE L'ELECTRON.

Les considérations qui suivent sont élémentaires. Elles sont données uniquement pour préciser les relations et formules qui sont utilisées dans le programme. La trajectoire d'un électron, d'énergie initiale $\mathcal{E}_0$, émis sous un angle θ et soumis à un champ électrique uniforme de module E , est une parabole dont l'équation (rapportée à un système d'axes passant par son sommet) s'écrit :

$$y^2 = 4 \tilde{z}_0 z \quad (1)$$

avec

$$\tilde{z}_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{E} \sin^2 \theta = |z_c| \sin^2 \theta$$

L'angle α que fait la tangente à la parabole avec l'axe des z en un point d'abscisse z_1 , quelconque, obéit à la relation :

$$\alpha = \arctg (\tilde{z}_0 / z_1)^{1/2} \quad (2)$$

Par suite, la connaissance de l'angle θ implique celle de z_1 au moyen de la relation :

$$z_1 = \frac{\mathcal{E}_0}{E} \cos^2 \theta \quad (3)$$

D'autre part, l'abscisse curviligne s correspondant à un déplacement $\Delta z = z_2 - z_1$ de l'électron sur l'axe des z est égale à :

$$s = F(z_2) - F(z_1) \quad (4)$$

avec :

$$F(z) = \left[z(z + \tilde{z}_0) \right]^{1/2} + \tilde{z}_0 \log \left[(1 - z/\tilde{z}_0)^{1/2} + (z/\tilde{z}_0)^{1/2} \right] \quad (5)$$

La variation de l'énergie de l'électron sur une tranche Δz (correspondant à une longueur λ) est donnée par :

$$\Delta \mathcal{E} = E \cdot \Delta z \quad (6)$$

Le calcul de $\Delta \mathcal{E}$ connaissant λ et z_1 nécessite l'inversion de la relation (4), ce qui est délicat analytiquement.

La détermination de Δz est réalisée par inversion numérique de la relation (4) au moyen du polynôme de Newton (Du-1).

Le déplacement latéral y de l'électron est donné par les relations suivantes :

$$\Delta y = 2 \tilde{z}_0^{1/2} (z_2^{1/2} - z_1^{1/2}) = v_0 \sin \theta \Delta t \quad (7)$$

où v_0 est le module de la vitesse initiale de l'électron. Le temps mis par l'électron pour parcourir la distance Δz peut donc être calculé au moyen des relations (7)

11.2. MODIFICATION DE L'ENERGIE DE L'ELECTRON AU COURS D'UNE COLLISION.

Dans le cas d'un gaz de sphères dures, la variation de l'énergie de l'électron au cours d'une collision élastique est donnée par la relation :

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{4m}{M} \cos^2 \alpha \quad (8)$$

avec (cf. figure 1) :

$$2 \cos^2 \alpha = 1 - \cos \theta \cdot \cos \theta' + \sin \theta \cdot \sin \theta' \cos \varphi \quad (9)$$

Dans (9), α représente l'angle que fait la vitesse de l'électron avant le choc avec la ligne des centres. La relation (8) implique évidemment l'immobilité des atomes du gaz. Je suppose par ailleurs, que, lors d'une collision inélastique, la perte d'énergie est exactement égale à l'énergie du niveau excité (ou ionisé) correspondant. Après une ionisation, j'admets que l'un des deux électrons est émis avec le dixième de l'énergie résiduelle, l'autre électron emportant l'énergie restante.

Cette hypothèse est effectuée en accord avec la courbe de GOODRICH (Go-4) que j'extrapole à toutes les valeurs de l'énergie incidente, la courbe de la figure 2 n'étant valable que pour une énergie incidente de l'électron de 100 eV.

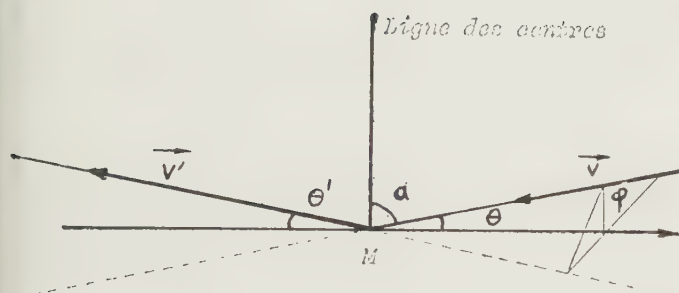


FIGURE 1

Nombre d'électrons
par tranche
d'énergie

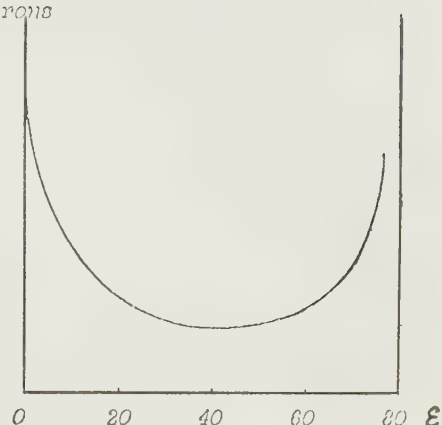


FIGURE 2

II.3. DETERMINATION DU LIBRE PARCOURS λ ET NATURE DE LA COLLISION.

II.3.1. Calcul du libre parcours.

Entre deux chocs, la longueur λ définie au paragraphe II.1 représente le libre parcours de l'électron λ . On a vu au chapitre I que, dans notre cas, il n'est plus possible d'utiliser la distribution classique des libres parcours. L'écriture correcte de la densité de probabilité est alors :

$$\Pi(\lambda) d\lambda = \exp\left[-N_0 \int_0^\lambda \sigma_T(\xi) d\xi\right] N_0 \sigma_T(\lambda) d\lambda \quad (10)$$

Par suite, la fonction de répartition $P(\lambda)$ qui donne la probabilité d'obtenir un libre parcours inférieur à λ s'écrit :

$$P(\lambda) = N_0 \int_0^\lambda \sigma_T(\ell) \exp\left[-N_0 \int_0^\ell \sigma_T(\xi) d\xi\right] d\ell \quad (11)$$

La formule (11) définit implicitement λ en tant que fonction de $P(\lambda)$. Par ailleurs, on sait que, si l'on considère $P(\lambda)$ comme une variable aléatoire équadistribuée sur l'intervalle $[0,1]$, la variable aléatoire λ correspondante admettra $\Pi(\lambda)$ comme densité de probabilité. La fonction inverse $\lambda(P)$ ne s'exprimant pas de manière simple, il peut paraître indispensable d'utiliser la méthode classique du rejet. Toutefois, dans ce cas, le temps de calcul est très important. Alors, il m'a semblé préférable d'adopter une technique dérivée de celle d'ITOH et MUSHI, sa mise en oeuvre étant a priori plus simple et plus rapide.

Sous la forme proposée par ITOH et MUSHA de gros inconvénients apparaissent cependant.

En effet, la distribution classique est appliquée systématiquement sur un dixième de libre parcours moyen. Il s'ensuit que l'on impose, dans tous les cas, une probabilité de collision constante (voisine de 0,1). La figure 3 représente deux trajectoires correspondant à des angles θ d'émission différents.

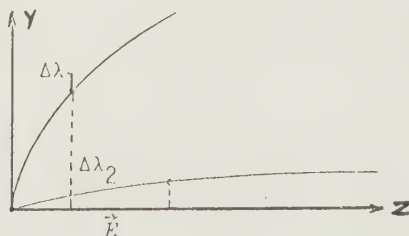


FIGURE 3

Si l'on applique la méthode d'ITOH et MUSHA, les probabilités d'interaction sur les segments $\Delta\lambda_1$ et $\Delta\lambda_2$ (avec $\Delta\lambda_1 = \Delta\lambda_2$) seront identiques alors que les variations d'énergie correspondantes pourront être très différentes.

Enfin, le calcul rigoureux de la variation d'énergie sur un segment $\Delta\lambda$ exige pour chaque test l'inversion de la formule (4) ce qui représente une perte de temps considérable et, par là même, une source d'erreurs.

On peut facilement éliminer les difficultés ci-dessus en adoptant un intervalle $\Delta\lambda$, variable, et correspondant à la plus petite variation $\Delta\epsilon^m$ d'énergie tolérée de manière à ce que la distribution classique des libres parcours puisse s'appliquer.

Pour cela, il suffit de diviser l'axe des z (voir figure 4) en tranches Δz égales à $\Delta\epsilon^m/E$ l'origine étant prise au point d'émission. Soit λ_1 la longueur de trajectoire correspondant à la tranche 1. La probabilité $P(\lambda_1)$ d'avoir un libre parcours inférieur à λ_1 est égale à

$$P(\lambda_1) = 1 - \exp(-\lambda_1 / \langle \lambda_T \rangle) \quad (12)$$

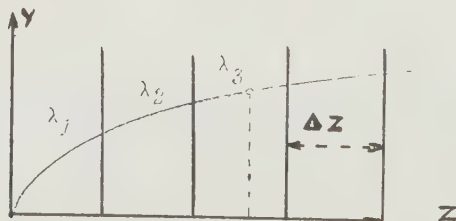


FIGURE 4

où $\langle \lambda \rangle$ représente évidemment la valeur du libre parcours moyen au début de la tranche.

Soit maintenant un segment λ de même origine que λ_1 . On a :

$$P(\lambda) = 1 - \exp\left(-\frac{\lambda}{\langle \lambda \rangle}\right) \quad (13)$$

Par suite :

$$P(\lambda) < P(\lambda_1) \Leftrightarrow \lambda < \lambda_1 \quad (14)$$

La présence d'un choc dans la tranche Δz est liée à l'inégalité :

$$\lambda < \lambda_1 \quad (15)$$

Si l'on connaît l'énergie ε_0 et l'angle Θ que fait la vitesse de l'électron avec l'axe des z après un choc, la longueur λ_1 se calcule à partir des formules (3) et (4). Le tirage d'un nombre γ équidistribué entre 0 et 1 autorise alors le calcul de λ par la relation :

$$\lambda = -\langle \lambda \rangle \log \gamma \quad (16)$$

La décision d'une collision s'effectue de la manière suivante :

un électron vient d'effectuer un choc. On calcule la distance λ_1 . On tire un nombre au hasard et on détermine λ au moyen de la relation (16) :

$$a - \lambda > \lambda_1$$

Il n'y a pas de choc dans la tranche 1, on répète le processus dans la tranche 2 avec une nouvelle énergie.

$$b - \lambda < \lambda_1$$

Un choc a lieu, son abscisse est déterminée par inversion numérique de la formule (4).

Il est clair que le choix d'une valeur judicieuse pour $\Delta \varepsilon^m$ est fondamental : une valeur trop faible peut conduire à un temps de calcul considérable, au contraire si $\Delta \varepsilon^m$ est trop élevé, d'importantes erreurs peuvent survenir si la variation du libre parcours est trop importante dans la tranche considérée.

En règle générale, j'ai constaté que les résultats obtenus ne variaient pas, tant que $\Delta \varepsilon^m$ était inférieur à 2 eV.

II.3.2. Nature de la collision.

Une fois définie la position d'une collision, il reste à savoir s'il s'agit d'un choc élastique ou inélastique.

Cette détermination est évidemment liée aux différentes sections efficaces considérées. Comme précédemment, j'ai adopté les sections efficaces de type II telles qu'elles sont définies dans la cinquième partie. Selon l'ordre de grandeur de l'énergie de l'électron incident et selon les valeurs de γ , équidistribuées entre zéro et un, plusieurs cas peuvent se produire.

1 - $\underline{\varepsilon < 19,8 \text{ eV}}$: collision élastique seule.

2 - $\underline{19,8 < \varepsilon < 21,45}$.

a - $\gamma < \sigma/\sigma_T$: choc élastique.

b - $\gamma > \sigma/\sigma_T$: excitation sur le niveau 1.

3 - $\underline{21,45 < \varepsilon < 24,46}$.

a - $\gamma < \sigma/\sigma_T$: choc élastique.

b - $\frac{\sigma}{\sigma_T} < \gamma < \frac{\sigma_{e1}}{\sigma_T}$: excitation sur le niveau 1.

c - $\sigma_{e1}/\sigma_T < \gamma < \sigma_{e2}/\sigma_T$: excitation sur le niveau 2.

4 - $\underline{\varepsilon > 24,46}$.

a - $\gamma < \sigma/\sigma_T$: choc élastique.

b - $\sigma/\sigma_T < \gamma < \sigma_{e1}/\sigma_T$: excitation sur le niveau 1.

c - $\sigma_{e1}/\sigma_T < \gamma < \sigma_{e2}/\sigma_T$: excitation sur le niveau 2.

d - $\gamma > \sigma_{e2}/\sigma_T$: ionisation.

11.4. DETERMINATION DES ANGLES θ ET φ .

En terme de $\sigma_{ij}(\varepsilon, \theta, \varphi)$, on a comme fonction de répartition :

$$F_{\varepsilon}^{ij}(\theta, \varphi) = \frac{\int_0^{\varphi} \int_0^{\theta} \sigma_{ij}(\varepsilon, \theta', \varphi') d\omega'}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sigma_{ij}(\varepsilon, \theta', \varphi') d\omega'} \quad (17)$$

Compte tenu du fait que, dans notre cas σ_{ij} ne dépend pas de φ , il vient :

$$F_{\varepsilon}^{ij}(\theta, \varphi) = F_{\varepsilon}^{ij,1}(\theta) \cdot F_{\varepsilon}^{ij,2}(\varphi) \quad (18)$$

rec :

$$F_{\varepsilon}^{ij,2}(\varphi) = \varphi/2\pi = \gamma_1 \quad (19)$$

$$F_{\varepsilon}^{ij,1}(\theta) = \frac{\int_0^\theta \sigma_{ij}(\varepsilon, \theta') d\omega'}{\int_0^\pi \sigma_{ij}(\varepsilon, \theta') d\omega'} = \gamma_2 \quad (20)$$

Pour simplifier et suivant en cela YARNOLD, ITOH et MUSHI et THOMAS et THOMAS, j'ai supposé dans un premier temps que toutes les directions de la vitesse de l'électron après un choc sont également probables. Par suite, σ_{ij} est une fonction de ε seul, et :

$$F_{\varepsilon}^{ij,1}(\theta) = \frac{1}{2} (1 - \cos \theta) \quad (21)$$

En résumé les variables aléatoires φ et θ sont déterminées au moyen des relations :

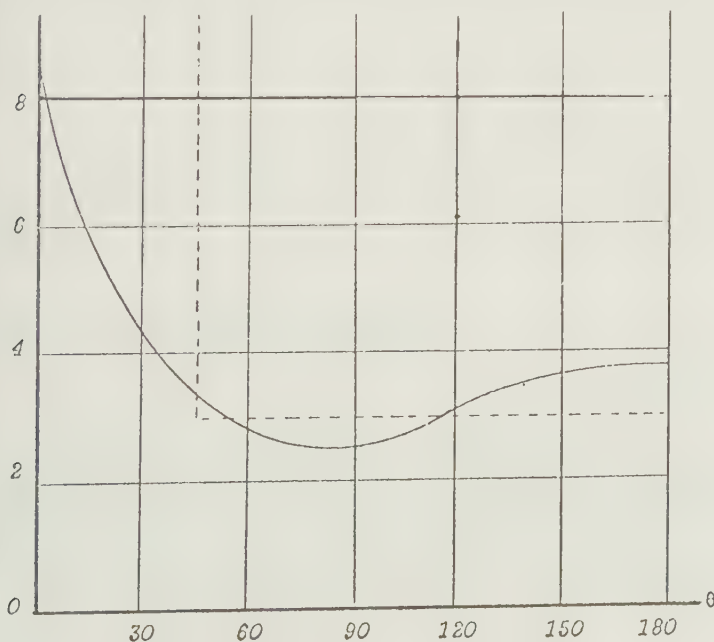
$$\varphi = 2\pi \gamma_1 \quad (22)$$

$$\theta = \text{Arc cos} (1 - 2 \gamma_2) \quad (23a)$$

Une fois connus γ_1 et γ_2 . Lorsque l'électron est émis de la cathode, la relation (23) doit être légèrement modifiée pour tenir compte de la diffusion vers l'avant uniquement, on a :

$$\theta = \text{Arc cos} (1 - \gamma_2) \quad (23b)$$

Il est bien évident qu'un traitement correct nécessite la connaissance des sections efficaces différentielles (ou de la loi de force électron-molécule). En fait, à l'heure actuelle, il n'existe aucune certitude relativement à l'allure de ces sections efficaces. Cependant, les courbes expérimentales de RAMSAUER et KOLLATH (Ra-2) (figure 5) montrent qu'il y a une plus grande probabilité d'émission sous un angle θ faible. Compte tenu de cette propriété, j'ai mis au point un programme qui me permet d'obtenir un échantillonnage de θ en imposant une probabilité d'émission voulue dans un cône de demi-angle au sommet donné. Ce programme permet ainsi d'obtenir une estimation de la loi de diffusion sur les différentes grandeurs calculées.



— RAMSAUER ET KOLLATH
 --- APPROXIMATION ADOPTÉE

FIGURE 5
 SECTIONS EFFICACES DIFFERENTIELLES
 DANS L'HELIUM.

Si l'on considère que l'électron a une probabilité P_1 (resp. P_2) d'être émis dans un cône de demi-angle au sommet θ_1 ($0 < \theta_1 < \pi$) (resp. $\pi - \theta_1$), alors, la fonction de répartition s'écrit :

$$\begin{aligned} F_{\varepsilon,1}^{ij,1}(\theta') &= \frac{P_1(1 - \cos \theta')}{1 + \cos \theta_1(1 - 2P_1)} & 0 < \theta' < \theta_1 & \text{Zone I} \\ F_{\varepsilon,2}^{ij,1}(\theta') &= \frac{P_1 + \cos \theta_1(1 - 2P_1) - (1 - P_1)\cos \theta'}{1 + \cos \theta_1(1 - 2P_1)} & \theta_1 < \theta' < \pi & \text{Zone II} \end{aligned} \quad (24)$$

Le tirage d'un pseudo-nombre au hasard γ permet de définir dans quelle zone on se trouve. En effet, si γ est inférieur à

$$\frac{P_1(1 - \cos \theta_1)}{1 + \cos \theta_1(1 - 2P_1)}$$

l'angle θ' est inférieur à θ_1 et se détermine au moyen de la fonction $F_{\varepsilon,1}^{ij,1}(\theta')$.

II.5. VUE D'ENSEMBLE SUR LA CONDUITE DES CALCULS.

II.5.1. Programme facteur de transmission.

Un électron est émis de la cathode avec une énergie ε_0 fixée. L'angle θ que sa vitesse initiale fait avec la direction du champ électrique est déterminé au moyen de la formule (23b). Alors, la trajectoire de l'électron entre deux chocs est parfaitement définie. Je détermine le libre parcours λ à l'aide de la méthode que j'ai proposée au paragraphe II.3. Si un choc n'a pas lieu dans la première tranche Δz , l'énergie à la fin de cette tranche est obtenue à partir de la relation (6) :

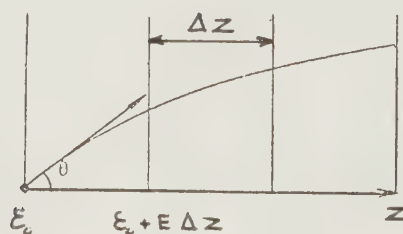


FIGURE 6

Dès qu'un choc a lieu, son abscisse ξ relativement au début de la tranche, est calculée par inversion numérique de la formule (4) (figure 4).

Au moment de la collision on évalue son éloignement de la cathode $z = \sum \Delta z + \varepsilon$, le déplacement latéral (le sens du déplacement latéral ($y > 0$, ou $y < 0$), est choisi au hasard), par la relation (7), l'énergie, l'angle θ et le temps de vol (respectivement au moyen des formules (3), (6) et (7)). La nature du choc est alors déterminée comme indiqué au paragraphe II.3.2. Si le choc est inélastique, l'électron est considéré comme transmis, et on recommence une nouvelle histoire.

Si le choc est élastique, un nouvel angle d'émission est calculé au moyen de la relation (23a). S'il y a lieu on tient compte de la perte d'énergie au cours de ce choc (formules (8), (9) et (22)). Le même processus recommence, mais en tenant compte de la possibilité de rebroussement de la trajectoire de l'électron si l'angle d'émission est supérieur à $\pi/2$ (figure 7).

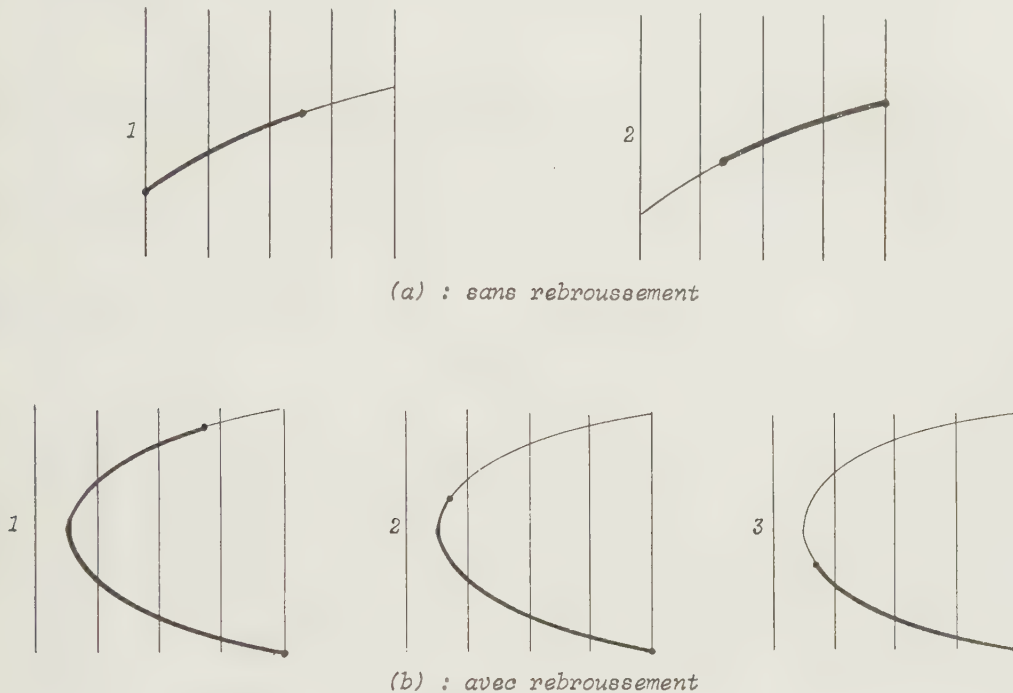


FIGURE 7

Si z devient négatif ou nul, l'électron est, soit perdu, soit réfléchi. J'ai séparé les deux cas, en calculant le facteur de transmission lorsque l'électron est systématiquement absorbé (coefficient de réflexion nul) puis lorsqu'il est réfléchi avec une certaine probabilité de réflexion.

Si r représente cette probabilité, deux éventualités sont possibles :

- $\gamma > r$: l'électron est absorbé ;
- $\gamma < r$: l'électron est réfléchi.

Enfin, je détermine systématiquement la position moyenne $\overline{z_{in}}$ et l'énergie moyenne $\overline{\epsilon_{in}}$ au moment du premier choc inélastique. Je reviendrai sur ces deux grandeurs au cours du chapitre suivant.

II.5.2 Programme général.

Dans ce programme, je me préoccupe de déterminer l'évolution dans le temps d'un certain nombre de paramètres caractéristiques de la décharge. Pour éviter de perdre des électrons par rétrodiffusion (ce qui allonge inutilement le temps de calcul), il suffit d'admettre que l'électron incident est émis à la distance $z_0 = -\epsilon_0/E$ de la cathode (c'est-à-dire au point d'énergie cinétique nulle).

Excepté cette modification, la simulation se déroule de manière identique au programme facteur de transmission. Toutefois le calcul n'est plus arrêté au premier choc inélastique, mais continue jusqu'à une valeur maximale T du temps. Les principales grandeurs définies au paragraphe précédent sont gardées en mémoire pour 5 valeurs distinctes du temps, telles que $t = k \frac{T}{5}$ ($k=1, \dots, 5$). Un certain nombre d'autres grandeurs sont stockées et classées sous forme d'histogrammes ; on obtient ainsi :

- la densité de probabilité des libres parcours λ (ceci pour chaque type de collision considérée, inélastique, ionisante, et la somme des deux en incluant les chocs élastiques)

- La densité de probabilité des intervalles de temps entre deux collisions ionisantes $-g(\tau)-$

- la densité de probabilité des déplacements le long de la direction du champ électrique correspondant à deux collisions ionisantes $-g(\xi)-$.

Je détermine également le rapport du nombre de collisions ionisantes au nombre total de collisions ainsi que le gain moyen d'énergie sur un libre parcours, et entre deux collisions inélastiques. A partir des informations ainsi recueillies, je calcule les principaux coefficients macroscopiques, premier coefficient d'ionisation de TOWNSEND, mobilité, etc... Par ailleurs, comme je l'ai déjà dit au cours de l'introduction, la détermination des grandeurs définies ci-dessus se fait en suivant l'histoire d'un seul électron, répétée un grand nombre de fois.

CHAPITRE III

RESULTATS (SIMULATION DIRECTE)

XXXXX

III.1. PROGRAMME "FACTEUR DE TRANSMISSION".

Energie moyenne et position moyenne au moment du premier choc

inélastique.

L'une des premières questions qui se pose (et qui n'a pas été abordée par les autres auteurs), est de savoir à partir de quelle valeur de E/p l'emploi de la distribution modifiée des libres parcours devient indispensable. J'ai abordé ce point qui me paraît très important en étudiant la variation avec E/p de la position moyenne $\langle z_{in} \rangle$ et de l'énergie $\langle \epsilon_{in} \rangle$ de l'électron au moment du premier choc inélastique. Le choix de ces paramètres se justifie parce qu'ils caractérisent bien le mouvement de l'électron et que leur calcul est relativement rapide. Par ailleurs, leur détermination est menée de front avec celle du facteur de transmission au cours du même programme.

III.1.1. Limite de validité de la distribution classique des libres parcours.

Les figures 8 et 9 représentent la variation de z_{in} et de ϵ_{in} en fonction de E/P et pour chacune des distributions utilisées.

Au-dessus d'une valeur de E/p de l'ordre de $20 \text{ V.cm}^{-1} \cdot \text{Torr}^{-1}$, les résultats ne sont plus les mêmes selon la distribution considérée. On conçoit aisément que les courbes soient identiques pour les faibles valeurs de E/p car la variation de l'énergie de l'électron sur un libre parcours étant très faible on a évidemment :

$$\lambda_T(\epsilon_0) \simeq \lambda_T(\epsilon_F)$$

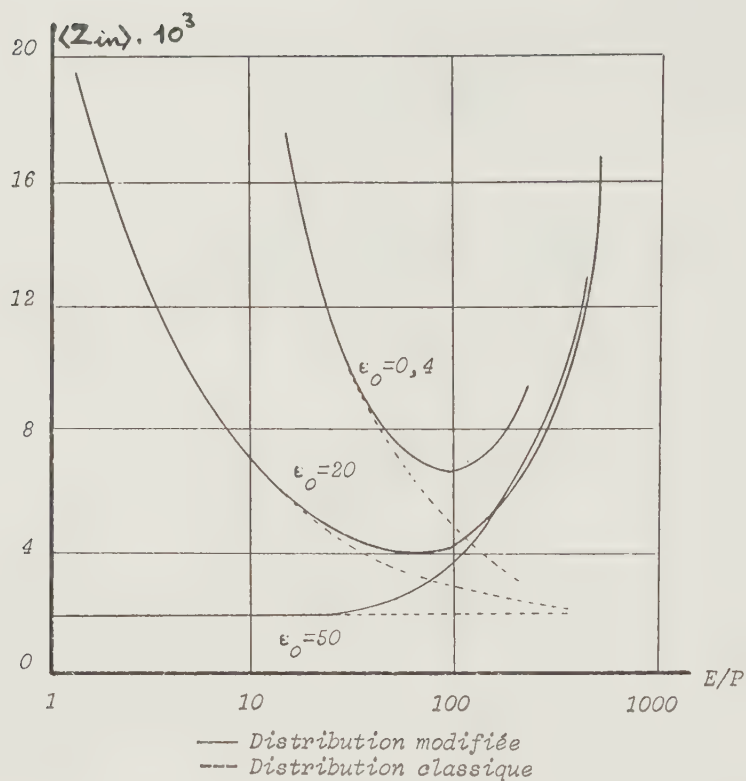


FIGURE 8

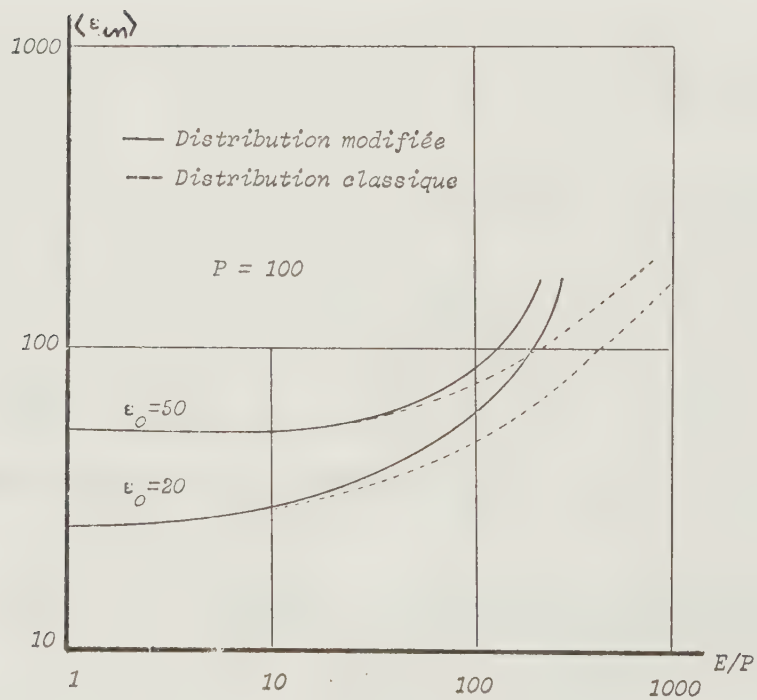


FIGURE 9

où ϵ_0 (resp. ϵ_F) représente l'énergie au début (resp. à la fin) du libre parcours.

La distribution classique des libres parcours s'applique donc pour un rapport E/p inférieur à 20 ce qui permet d'accélérer considérablement les calculs.

Ceci étant, comment justifier le comportement global des graphes des figures 8 ou 9 ?

L'explication de la décroissance des courbes pour $E/p < 20$ est simple. En effet, si $\epsilon_0 < 19,8$ eV, l'électron doit tout d'abord atteindre une énergie suffisante pour pouvoir effectuer une collision inélastique. Cette énergie est acquise sur une distance d'autant plus courte que E/p est plus fort. Par suite, $\langle z_{in} \rangle$ diminue si E/p croît. Il n'y a pas de décroissance si $\epsilon_0 \gg 19,8$ eV car l'électron peut dès son émission effectuer une collision inélastique et sa réalisation est donc indépendante de E/p .

Si E/p est plus grand que 20, les courbes se séparent et celle correspondant à la distribution modifiée croît rapidement. La croissance rapide des graphes en fonction de E/p est due à la prédominance, dans cette zone, de l'action du champ sur celle des collisions. Plus E/p augmente, plus la variation en énergie des électrons le long d'un libre parcours devient importante, et, compte tenu de la dépendance fonctionnelle de σ_T avec l'énergie, plus les libres parcours s'allongent (on retrouve d'ailleurs ici un problème identique à celui évoqué au paragraphe IV.1.1 de la troisième partie) : la probabilité de collision décroît et $\langle z_{in} \rangle$ croît (de même $\langle \epsilon_{in} \rangle$).

Cette croissance n'apparaît pas dans le cas de la distribution classique des libres parcours parce que la probabilité de collision est fixée avec l'énergie de l'électron au début du libre parcours et demeure constante jusqu'à la collision suivante : les libres parcours sont toujours inférieurs à ceux relatifs à la courbe croissante.

Evidemment plus E/p devient important et plus l'écart entre les deux distributions s'accroît.

III.1.2. Influence de l'énergie initiale et des autres paramètres.

Si l'on néglige la variation de l'énergie de l'électron au cours des chocs élastiques, l'énergie d'un électron au moment du premier choc inélastique s'écrit :

$$\epsilon_{in} = \epsilon_0 + E \cdot z_{in}$$

Si n électrons sont partis de la cathode avec l'énergie ϵ_0 , on a :

$$\langle z_{in} \rangle = \frac{1}{E} \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon_i - \epsilon_0}{n} = \frac{1}{E} (\langle \epsilon_{in} \rangle - \epsilon_0)$$

Si ϵ_0 est inférieur à ϵ_{in} , $\langle z_{in} \rangle$ décroît lorsque ϵ_0 croît ; dans le cas contraire $\langle z_{in} \rangle$ croît. C'est bien ce qu'indique la figure 10.

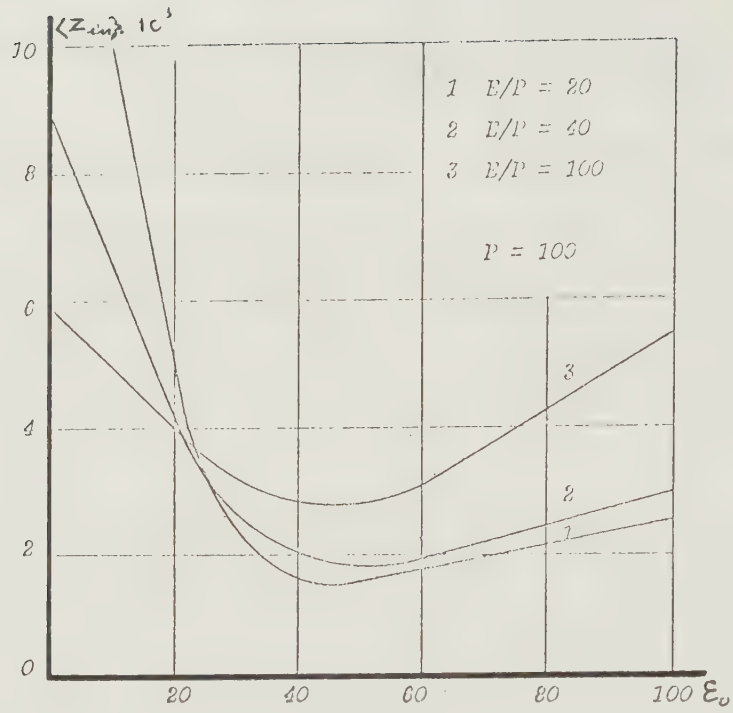


FIGURE 10

POSITION MOYENNE DU PREMIER CHOC INELASTIQUE EN FONCTION DE L'ENERGIE INITIALE.

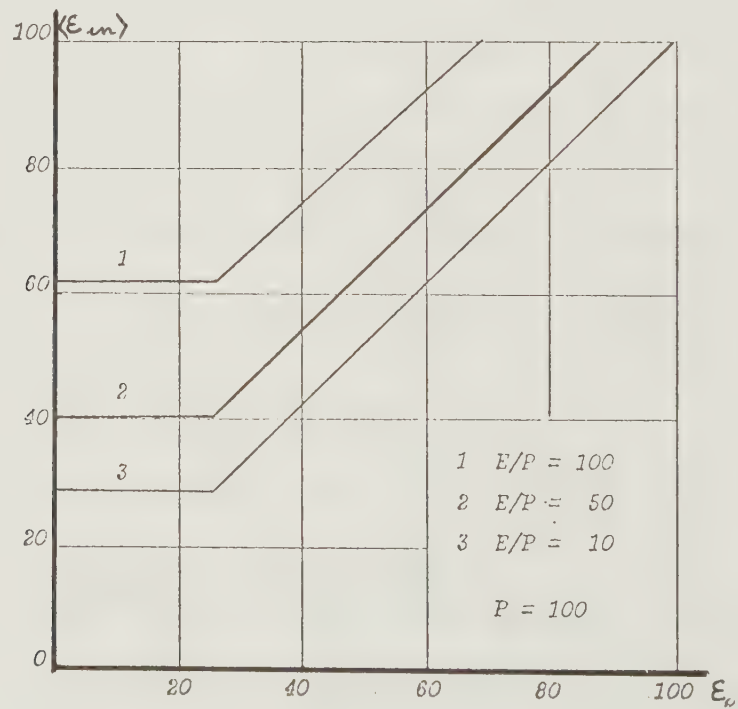


FIGURE 11

ENERGIE MOYENNE AU MOMENT DU PREMIER CHOC INELASTIQUE EN FONCTION DE L'ENERGIE INITIALE.

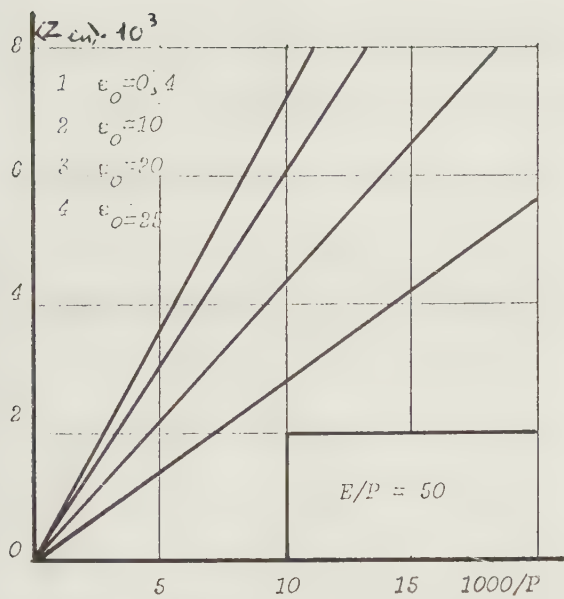


FIGURE 12

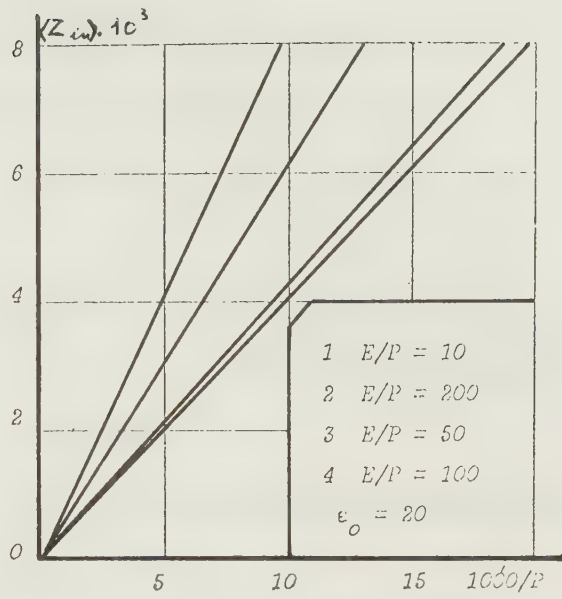


FIGURE 13

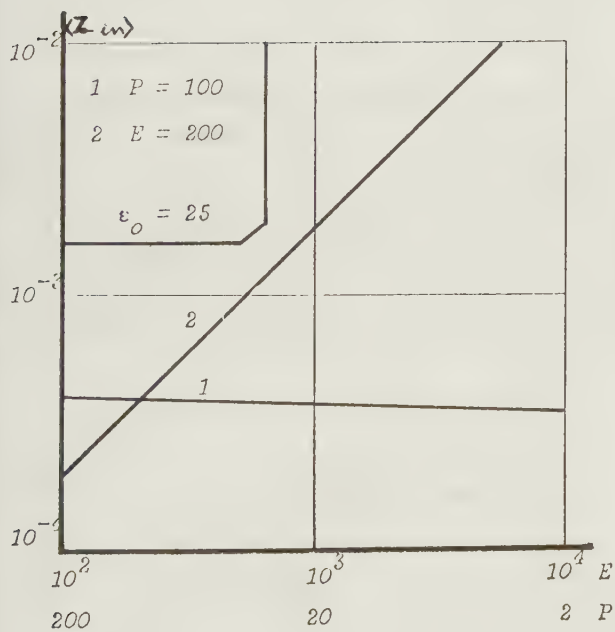


FIGURE 14

VARIATION DE LA POSITION MOYENNE DU PREMIER CHOC INELASTIQUE AVEC E OU P .

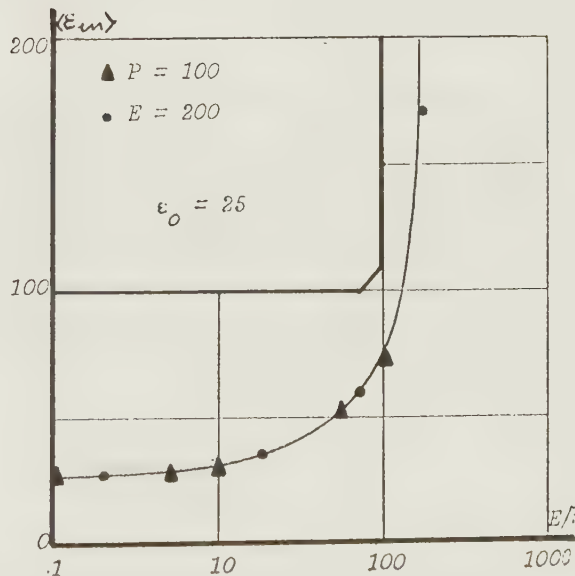


FIGURE 15

VARIATION DE L'ENERGIE MOYENNE AU MOMENT DU PREMIER CHOC INELASTIQUE.

L'intérêt de cette vérification vient de ce qu'elle permet d'étudier l'exactitude de la simulation et de tester l'influence des erreurs d'arrondi sur les résultats du calcul.

On peut vérifier de la même façon la variation de $\langle \epsilon_{in} \rangle$ avec ϵ_0 (figure 11).

Aux faibles valeurs de ϵ_0 , $\langle \epsilon_{in} \rangle$ est constant, puis croît linéairement.

Par ailleurs, les figures 12 et 13 montrent que $\langle z_{in} \rangle$ est une fonction linéaire de $1/p$.

L'étude de la variation de $\langle z_{in} \rangle$ en fonction de E/p pour différentes valeurs de E et de p montre (figure 14) que $\langle z_{in} \rangle$ n'est pas fonction du paramètre réduit E/p . Par contre, $\langle \epsilon_{in} \rangle$ ne dépend que de E/p (figure 15). Ce résultat est tout comme au paragraphe IV.3 de la troisième partie une conséquence de la loi de similitude.

III.2. FACTEUR DE TRANSMISSION T_r .

Comme on l'a déjà dit plus haut, la méthode de simulation permet d'obtenir aisément le facteur de transmission T_r qu'il sera évidemment intéressant de comparer aux résultats obtenus au cours de la troisième partie au moyen de l'équation de Boltzmann. L'étude du réseau de caractéristiques nous permet d'affirmer que tant que ϵ_0 est inférieur au premier seuil d'excitation (zone I) un électron ne peut plus revenir à la cathode dès l'instant qu'il a effectué une collision inélastique (zone II). Par suite, je considère qu'un électron est perdu lorsqu'un choc élastique a eu lieu. De même, si ϵ_0 est plus grand que ϵ_1 mais inférieur à $2\epsilon_1$, on peut affirmer qu'un électron ne pourra plus revenir à la cathode après deux chocs inélastiques. Et ainsi de suite au fur et à mesure que ϵ_0 croît.

Le facteur de transmission T_r est défini ici comme le rapport du nombre d'électrons qui ont effectué un (ou plusieurs) chocs inélastiques, au nombre de ceux qui ont été effectivement émis à la cathode. On conçoit l'importance de la détermination correcte du facteur T_r dans tous les problèmes liés aux décharges non autonomes et en particulier dans la connaissance du deuxième coefficient de TOWNSEND. Les courbes proposées par THOMAS et THOMAS et celles que j'ai obtenues (figure 16) lorsqu'il y a absorption ($r=0$), croissent à partir d'une certaine valeur de l'énergie initiale, ce qui est (comme l'on sait) en contradiction avec l'allure prédite par les formules de THOMSON (a) ou de VARNEY simplifiée (b) (Va-2):

$$a - T_r = \frac{v_d}{v_d + v_0/4} \quad b - T_r = \frac{v_d}{v_d + D / \langle \lambda_r \rangle} \quad (25)$$

v_d représente la vitesse de dérive.

Il est clair par ailleurs, que le réseau de la figure 16 présente une structure similaire à celui de la figure 10 de la troisième partie : les écarts entre les valeurs homologues ne dépassent pas 20% ce qui, compte tenu de la nature totalement différente des méthodes employées dans les deux cas constitue un résultat assez remarquable.

D'autre part, la loi de distribution des libres parcours n'a pas d'effet sur le facteur de transmission. T_r dépend évidemment uniquement du rapport E/P (figure 17). L'influence de la distribution angulaire après un choc est indiquée sur les figures 18 et 19. Le réseau des courbes obtenues en attribuant à la cathode un coefficient de réflexion r est représenté sur la figure 20. L'accord obtenu avec les résultats de la troisième partie est à nouveau excellent.

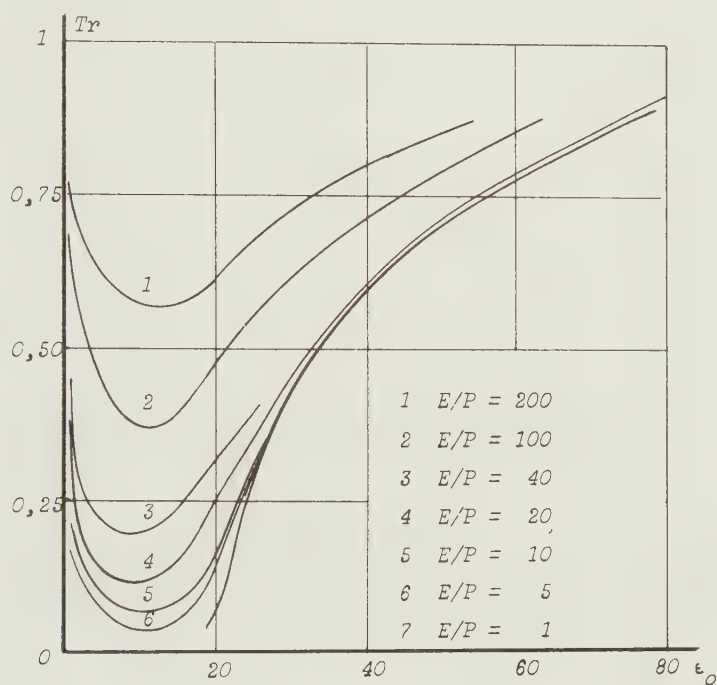


FIGURE 16

VARIATION DU FACTEUR DE TRANSMISSION EN FONCTION DE L'ENERGIE INITIALE POUR $P = 100$.

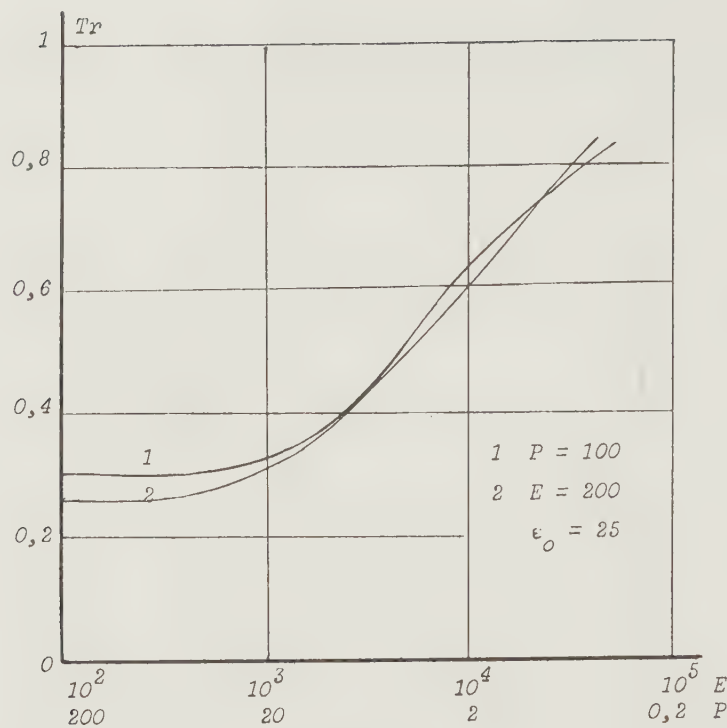


FIGURE 17

VARIATION DU FACTEUR DE TRANSMISSION EN FONCTION DE E ET DE P .

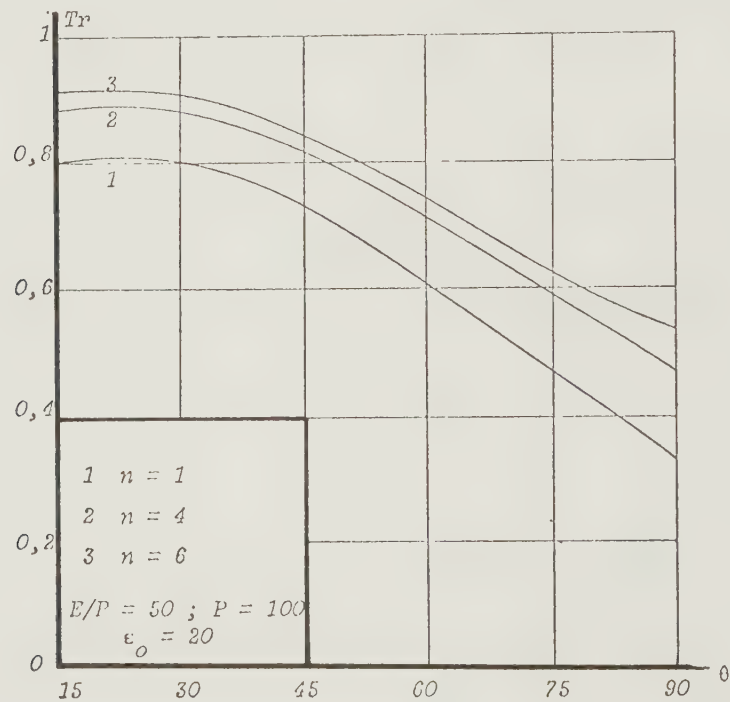


FIGURE 18

INFLUENCE DE L'OUVERTURE ANGULAIRE DU CONE SUR LE FACTEUR DE TRANSMISSION.

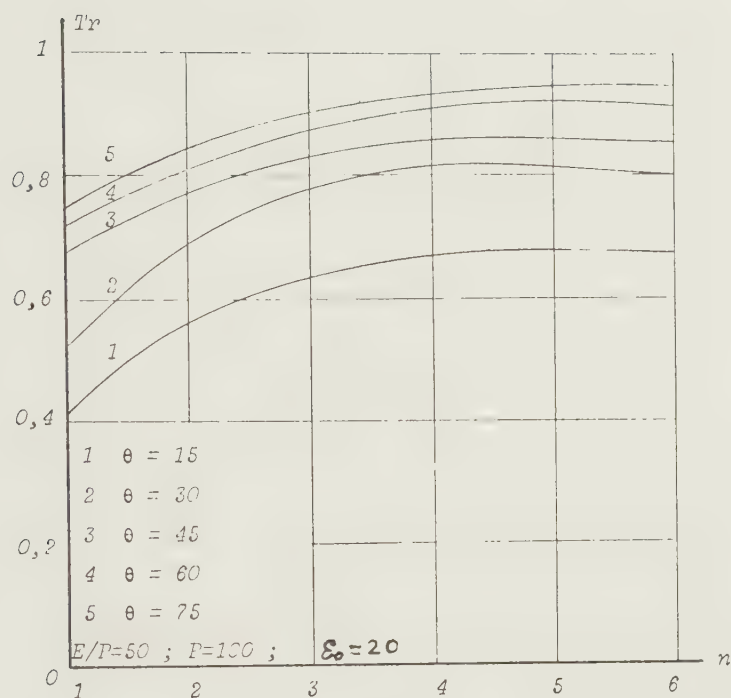


FIGURE 19

INFLUENCE DU RAPPORT n DU NOMBRE D'ELECTRONS DANS UN CONE D'ANGLE θ DONNÉ PAR RAPPORT A $\pi - \theta$ SUR LE FACTEUR DE TRANSMISSION.

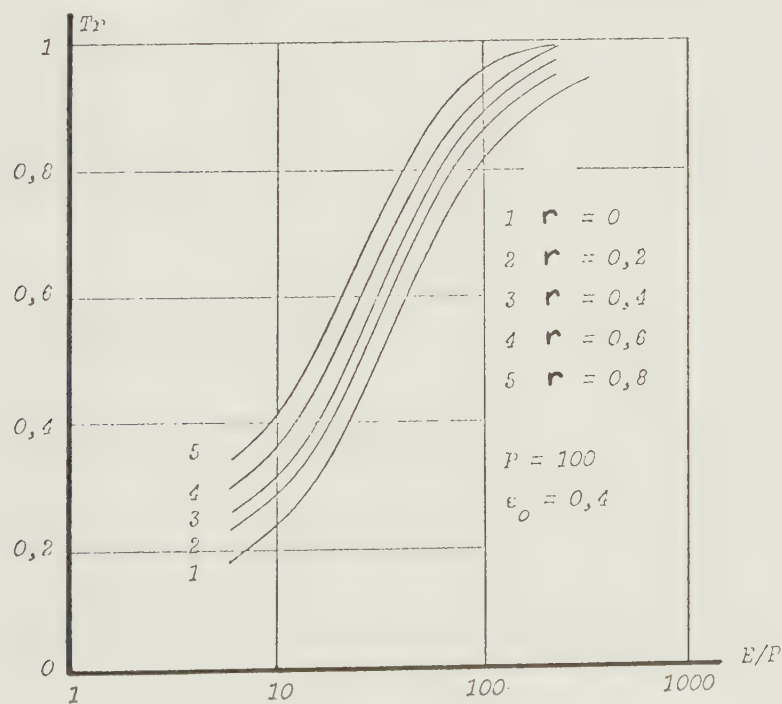


FIGURE 20

VARIATION DE Tr EN FONCTION DU FACTEUR DE REFLEXION r .

CHAPITRE IV

RESULTATS (SIMULATION DIRECTE)

ETUDE D'UN MILIEU EVOLUTIF

XXXXX

Jusqu'à présent, j'ai strictement limité mon travail à un état stationnaire dont l'étude au moyen de l'équation de Boltzmann est en général plus simple que celle d'un milieu évolutif. La situation est inversée lorsque l'on adopte une technique de simulation et c'est le milieu évolutif qui est le plus aisé à étudier. C'est pourquoi, dans ce qui suit, je vais présenter les résultats obtenus dans ce domaine. J'insisterai particulièrement sur la nature de la transition vers l'équilibre des grandeurs macroscopiques : on verra en particulier que ce retour qui s'effectue de manière extrêmement rapide permet d'obtenir des informations précises sur la valeur de ces grandeurs macroscopiques à l'état stationnaire.

IV.1. LIMITE DE LA VALIDITE DE LA METHODE.

L'énergie moyenne $\langle E \rangle$ (fonction du temps seulement) et la position moyenne $\langle z \rangle$ des électrons, sont calculées en moyenne arithmétique sur la totalité des histoires. Les diverses distributions (de cosinus, en énergie, en position, des libres parcours, du gain d'énergie entre les collisions, des intervalles de temps et d'espace entre deux collisions ionisantes) sont stockées à intervalle de temps égaux sous forme d'histogrammes dont les limites sont définies au début du programme. On calcule la vitesse de dérive en déterminant le temps moyen que met un électron à atteindre une distance z .

Le premier coefficient d'ionisation de TOWNSEND est obtenu en calculant le rapport du nombre d'ionisation à la distance correspondante parcourue.

J'ai déjà indiqué que je considèrerais l'ionisation comme une simple excitation (la perte d'énergie étant choisie au hasard à partir de l'énergie résiduelle selon un rapport donné). On conçoit qu'un certain nombre de paramètres obtenus dans ce modèle, s'écarterait fortement des valeurs que l'on obtiendrait si l'on tenait compte réellement de l'ionisation. Cela est vrai en particulier pour la vitesse de dérive et la densité de présence (figure 21). Cependant, le modèle que j'ai adopté permet de déterminer rapidement et de manière rigoureuse, les fonctions $g(\xi)$ ou $g(\tau)$ dont l'importance apparaîtra clairement au chapitre V.

IV.2. TRANSITION VERS L'EQUILIBRE.

On constate que la transition vers l'équilibre s'effectue en deux étapes :

1 - Dans une première phase, toutes les grandeurs évoluent d'une façon régulière. Les figures 22, 23 et 24 montrent l'évolution de l'énergie moyenne, de la vitesse moyenne et des distributions angulaires.

Si l'on calcule dans cette zone des quantités moyennes, les résultats seront très peu fluctuants pour des valeurs de E/p intermédiaires et des énergies $\epsilon_0 < \epsilon$. Par contre ces résultats dépendent des conditions initiales, en particulier de l'énergie d'émission dont on voit l'influence sur les énergies moyennes (figure 25), la position moyenne (figure 26), la vitesse moyenne (figure 27), les valeurs de α/p (figure 28), ainsi que sur les distributions des distances entre deux collisions ionisantes (figure 29).

Le faible taux de fluctuation peut se justifier en remarquant que, bien avant l'équilibre, il n'y a pratiquement que des chocs élastiques au cours desquels la variation d'énergie est négligeable (figure 30).

2 - Dans une deuxième phase, les chocs inélastiques deviennent prépondérants et on observe de fortes fluctuations des grandeurs autour de leur valeur moyenne.

Il est à noter (figure 31) que l'énergie se stabilise plus vite que la vitesse. On peut essayer d'appréhender le phénomène en constatant que la stabilisation de la vitesse nécessite, en plus de la stabilité de l'énergie, celle de la distribution angulaire.

On remarque sur la figure 32 que le temps de stabilisation décroît pour des valeurs du champ croissant (E/p compris entre 1 et 100).

Pour une valeur de E/p fixée, le temps de stabilisation est évidemment une fonction décroissante de la pression puisqu'il est lié à la fréquence des collisions. Ceci est confirmé par la figure 33 pour l'énergie et par la figure 34 pour la distribution angulaire.

Si l'on s'intéresse au gain moyen d'énergie entre deux collisions inélastiques on voit (figure 35) qu'il augmente au cours du temps alors que le gain d'énergie entre deux collisions élastiques reste stable. On peut comprendre ce résultat en examinant l'allure des distributions des libres parcours (figure 36) et des intervalles ξ (figures 37 et 38).

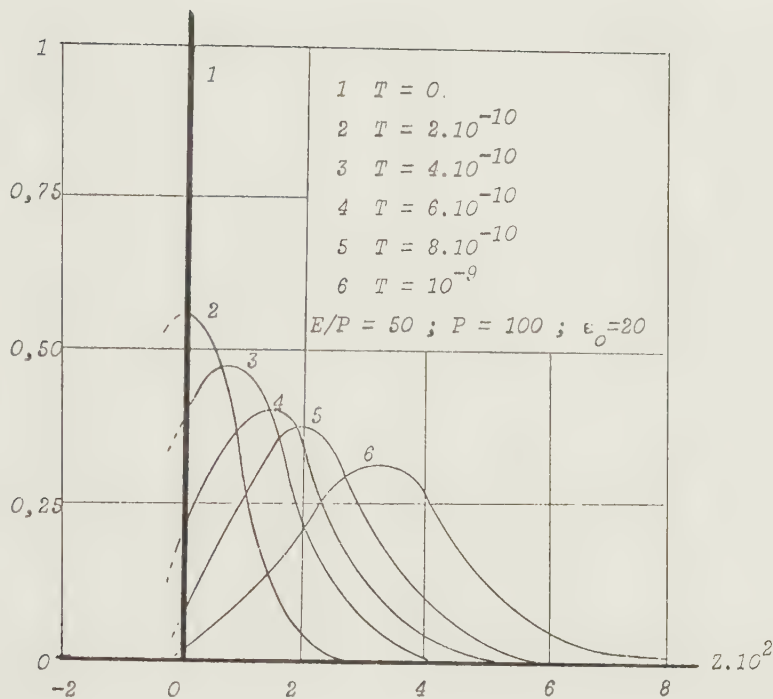


FIGURE 21

EVOLUTION DU NUAGE ELECTRONIQUE SANS MULTIPLICATION.

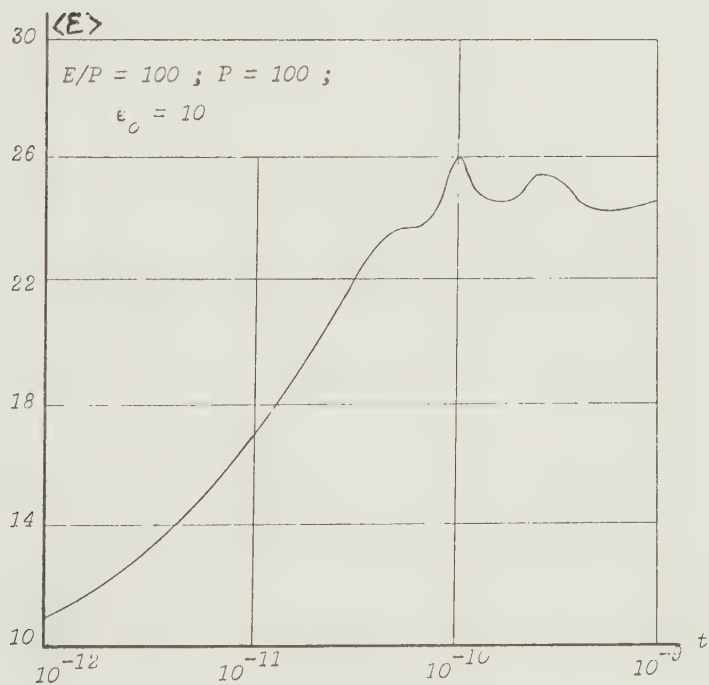


FIGURE 22

EVOLUTION DE L'ENERGIE MOYENNE EN FONCTION DU TEMPS.

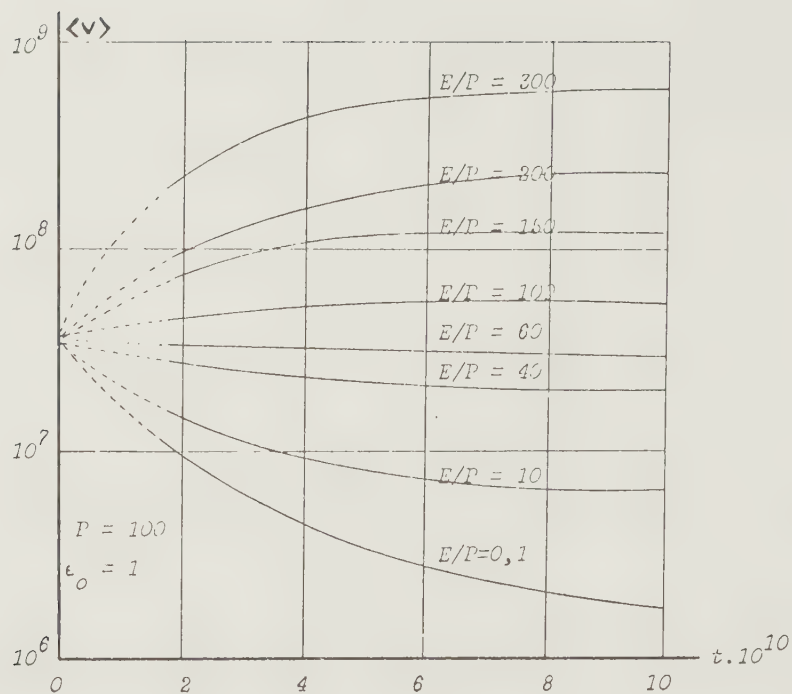


FIGURE 23

EVOLUTION DE LA VITESSE MOYENNE EN FONCTION DU TEMPS.

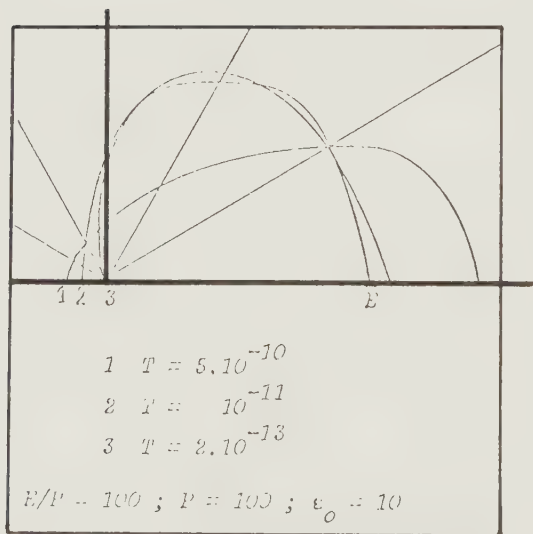


FIGURE 24

EVOLUTION DE LA DISTRIBUTION ANGULAIRE
EN FONCTION DU TEMPS.

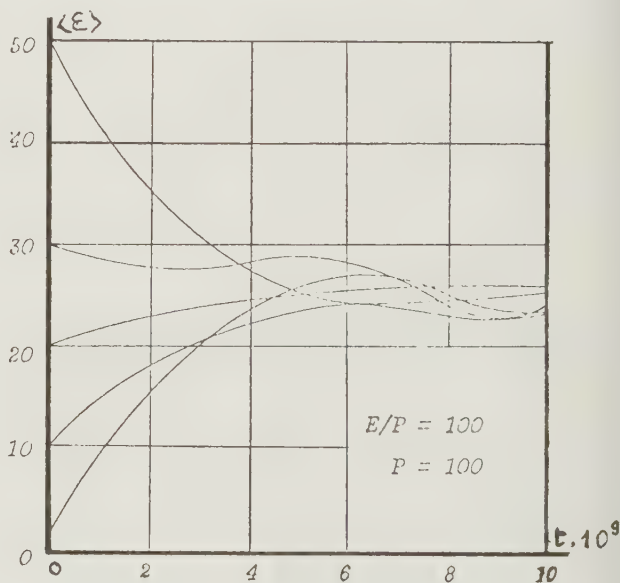


FIGURE 25

INFLUENCE DE L'ENERGIE INITIALE DES ELECTRONS
SUR L'ENERGIE MOYENNE.

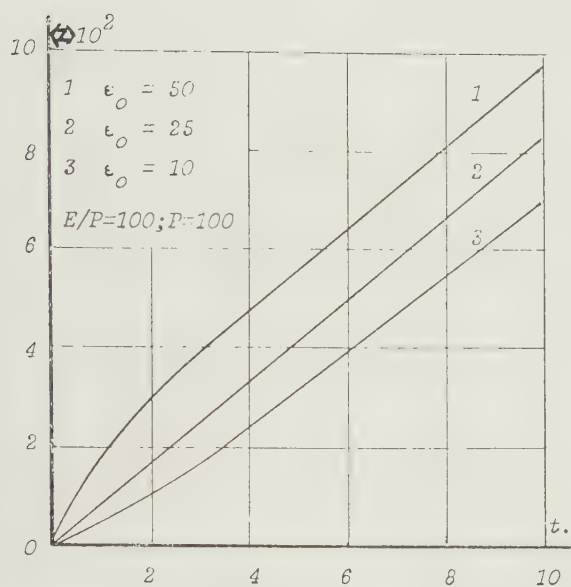


FIGURE 26

POSITION MOYENNE DES ELECTONS EN FONCTION
 DE L'ENERGIE INITIALE ET DU TEMPS.

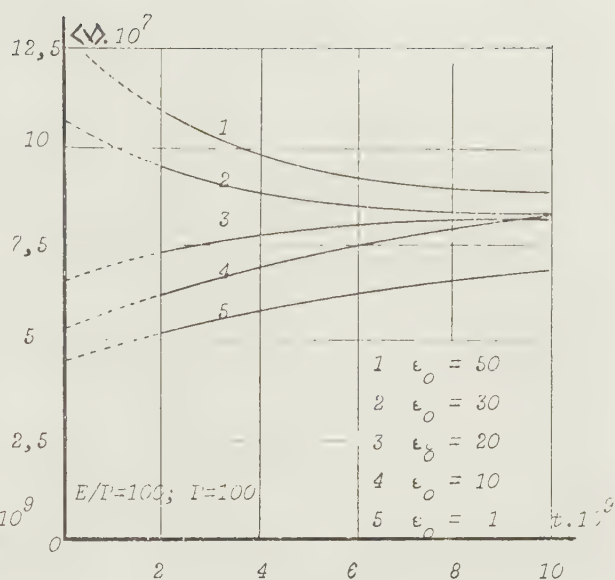


FIGURE 27

VITESSE MOYENNE DES ELECTONS EN FONCTION
 DE L'ENERGIE INITIALE ET DU TEMPS.

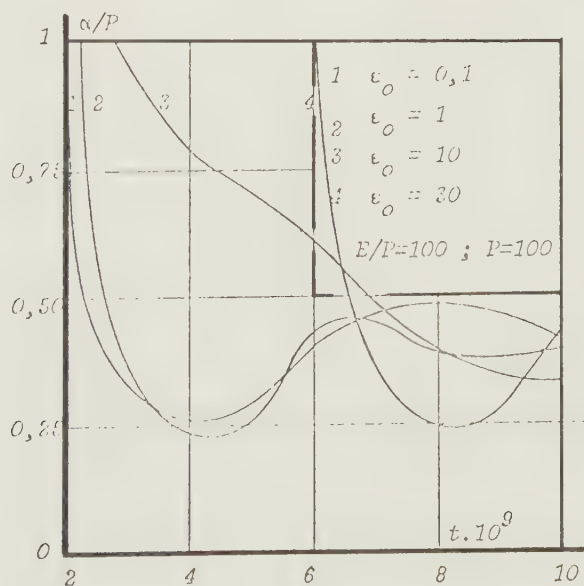
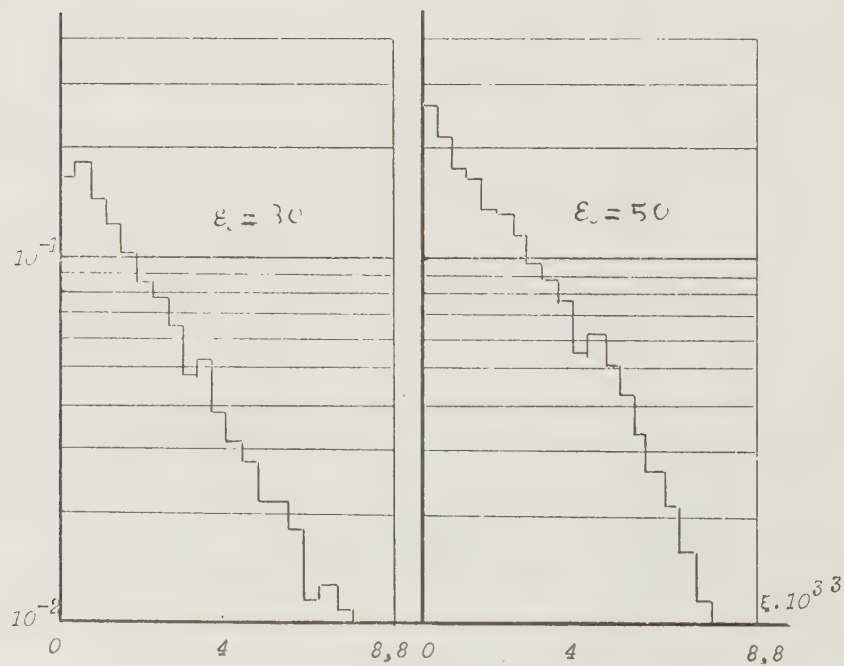
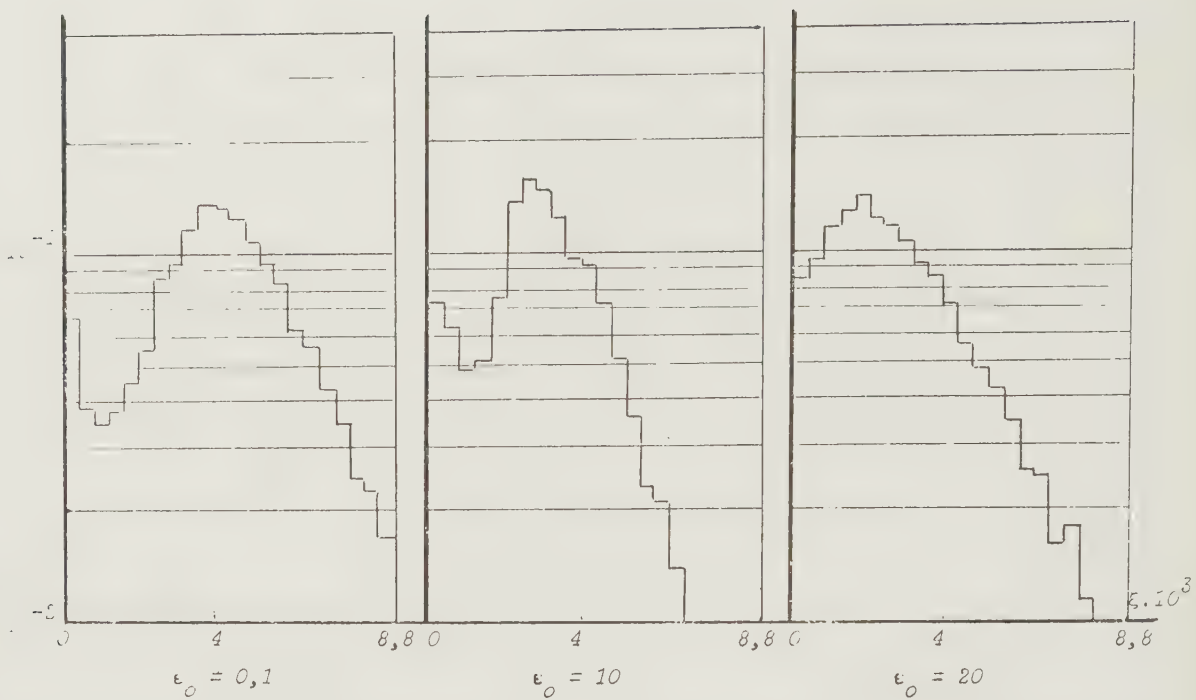


FIGURE 28

VARIATION DE α/P EN FONCTION DE L'ENERGIE INITIALE.



E/P = 100
P = 100
T = 10^{-10}
1000 histoires

FIGURE 29
VARIATION DE $g(\xi)$ EN FONCTION DE ε_0

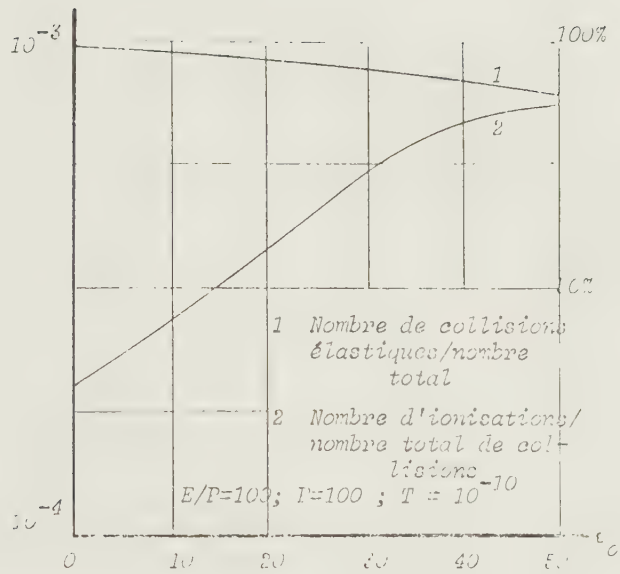


FIGURE 30

IMPORTANCE RELATIVE DES TYPES DE COLLISIONS EN FONCTION DE L'ENERGIE INITIALE.

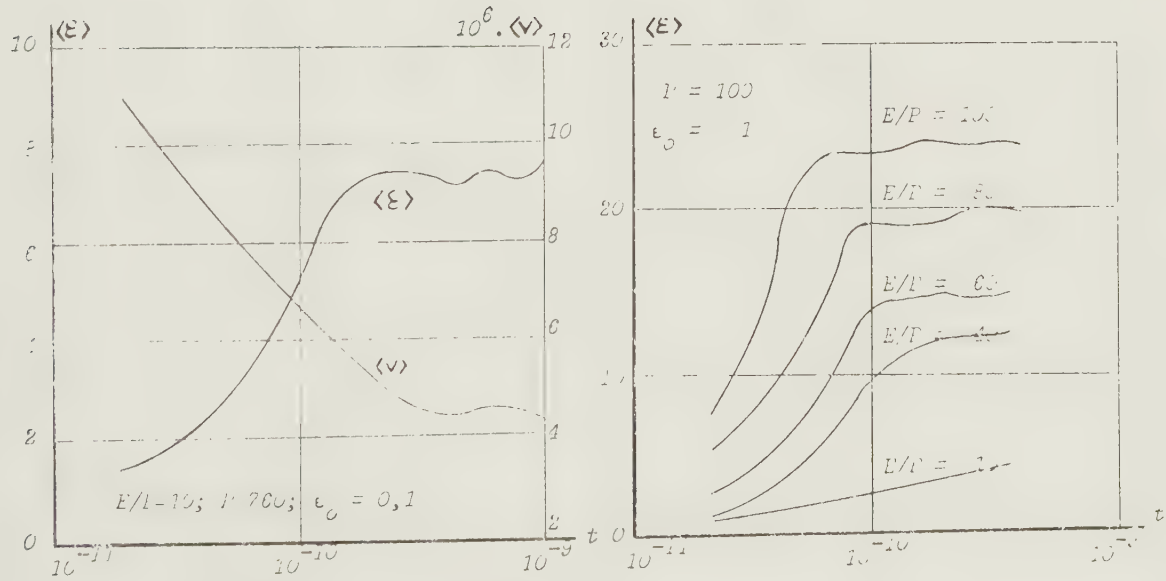


FIGURE 31

COMPARAISON DE L'EVOLUTION DE L'ENERGIE MOYENNE ET DE LA VITESSE MOYENNE.

FIGURE 32

EVOLUTION DE L'ENERGIE MOYENNE POUR DIFFERENTES VALEURS DE E/P.

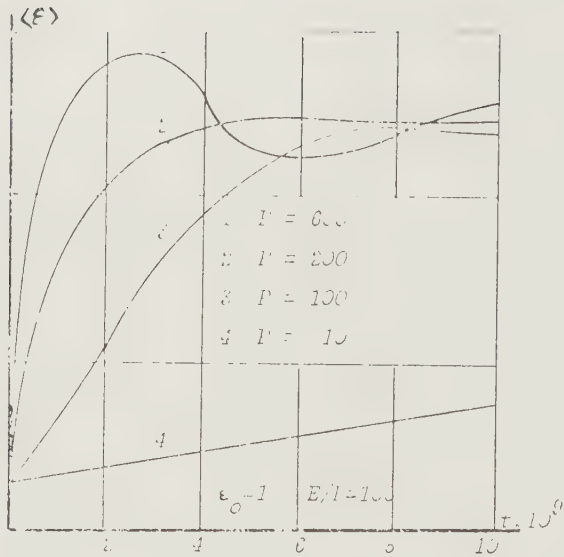


FIGURE 33

EVOLUTION DE L'ENERGIE MOYENNE POUR DIFFERENTES VALEURS DE LA PRESSION, E/P ETANT CONSTANT.

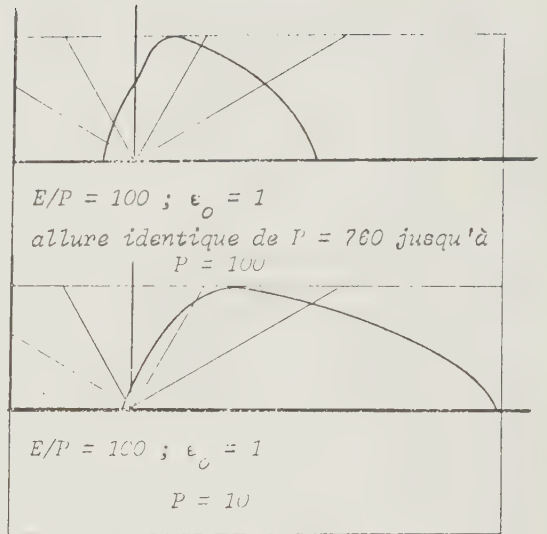


FIGURE 34

EVOLUTION DE LA DISTRIBUTION ANGULAIRE A UN TEMPS $T = 10^{-10}$ EN FONCTION DE LA PRESSION, E/P ETANT CONSTANT.

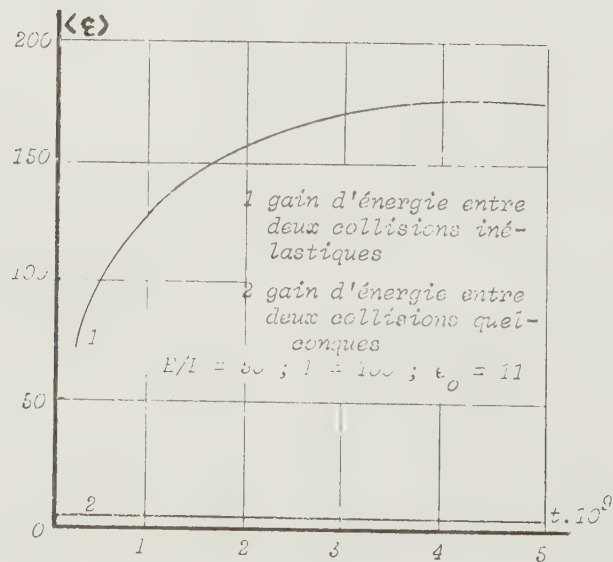


FIGURE 35

EVOLUTION DU GAIN D'ENERGIE ENTRE LES DIFFERENTS TYPES DE COLLISIONS.

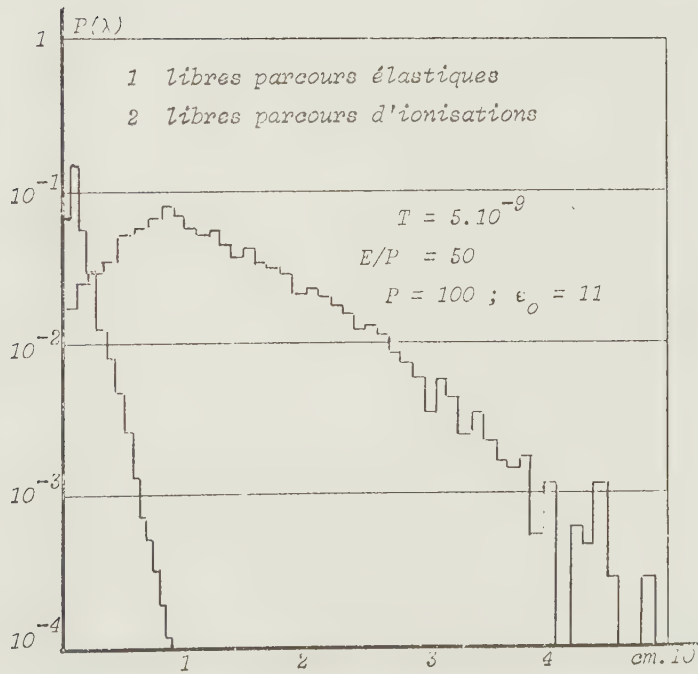
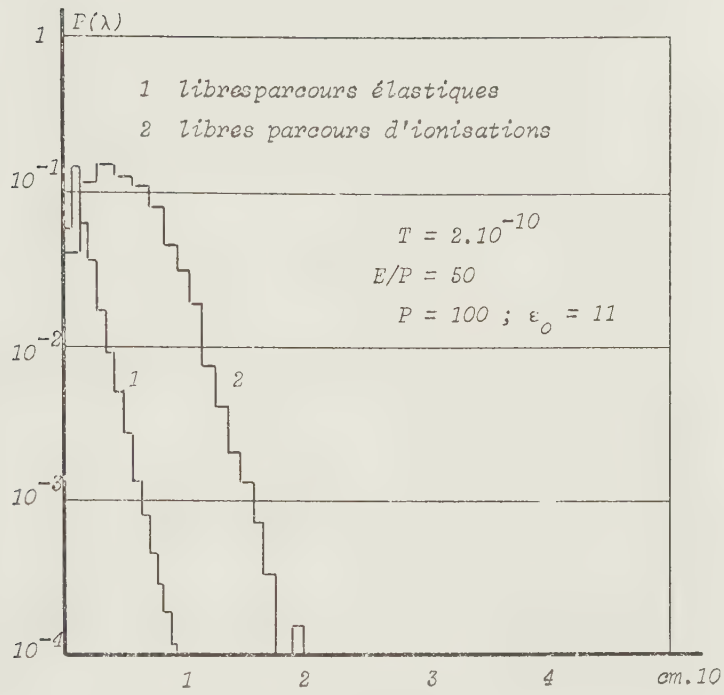


FIGURE 35

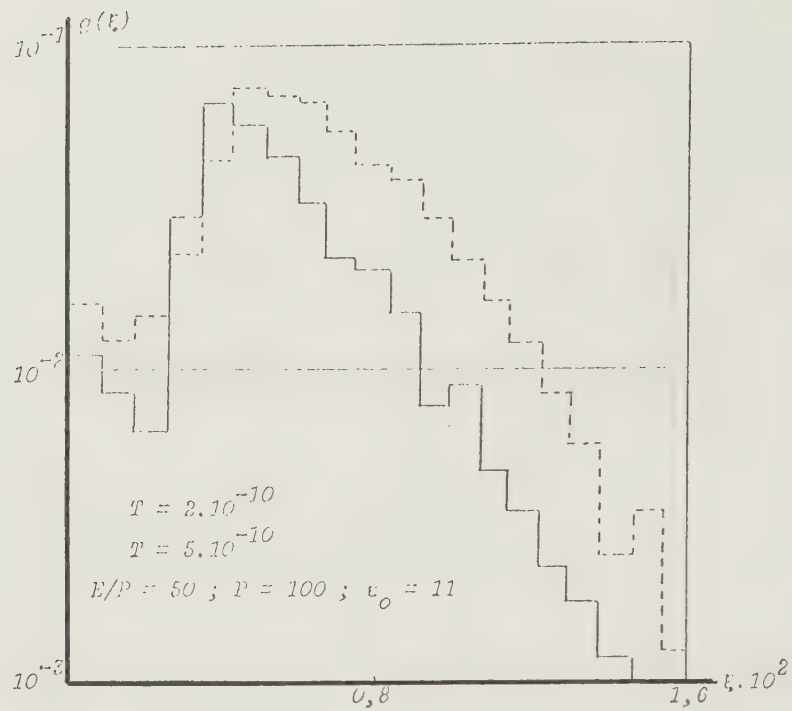


FIGURE 37
DISTRIBUTION DES ξ EN FONCTION DE T.

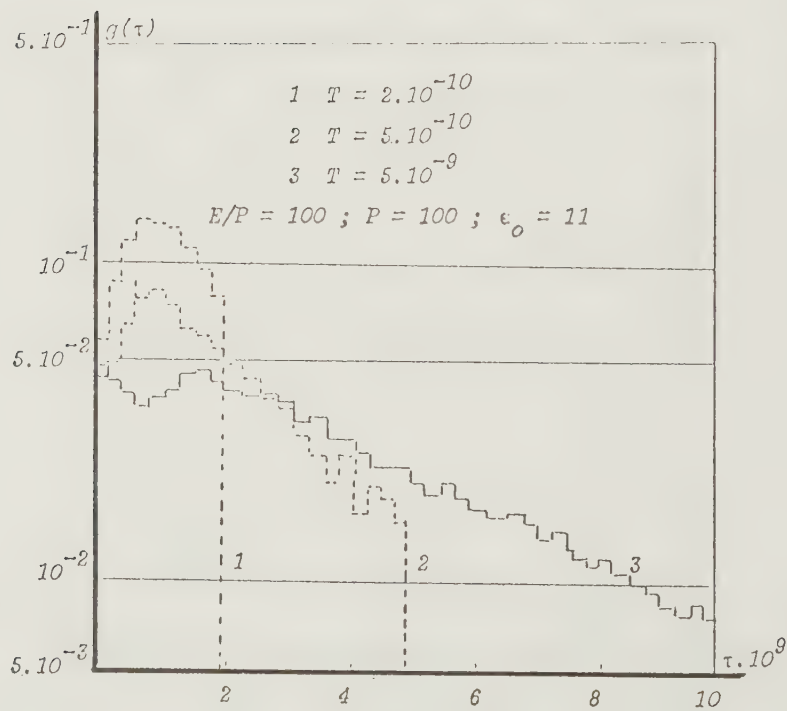


FIGURE 38
DISTRIBUTION DES τ EN FONCTION DE T.

IV.3. INFLUENCE DU CHAMP ET DE LA PRESSION.

IV.3.1. Influence du paramètre E/p à pression constante.

Pour étudier l'influence de E/p sur les différentes grandeurs, j'ai pris comme énergie de départ une énergie proche de la valeur d'équilibre, la pression étant de 100 Torr. Les figures ci-dessous montrent l'influence de E/p respectivement sur :

- l'énergie moyenne (figure 39) ;
- la vitesse moyenne (figure 40) ;
- les cosinus (figure 41) ;
- la position moyenne (figure 42) ;
- le gain d'énergie entre deux chocs (figure 43) ;
- nombre d'ionisations/nombre de collisions total (figure 44) ,
- les libres parcours (figure 45) ;
- la distribution des distances entre deux collisions ionisantes (figure 46).

La figure 45 justifie l'emploi de la distribution classique des libres parcours pour des valeurs de $E/p < 20$. Toutes les courbes sont ici obtenues avec la distribution des libres parcours modifiée.

IV.3.2. Influence de la pression à E/p constant.

A l'équilibre, toutes les grandeurs habituelles $\langle E \rangle, \langle \tau \rangle, \langle \cos \theta \rangle, \mu p, \alpha/p$, ne dépendent évidemment que du rapport E/p , ce que l'on peut constater sur les courbes 39 et 40.

On remarque de même que le produit τ_{MP} (resp. ξ_{MP}) est constant (resp. ϵ_M) (ϵ_M représentant l'abscisse du maximum de $g(\tau)$ (resp. $g(\xi)$)) figures 47, 48 et 49.

IV.4. VALIDITE DES HYPOTHESES.

J'ai contrôlé, l'influence que pouvaient avoir les diverses hypothèses simplificatrices que j'ai utilisées :

- répartition de l'énergie résiduelle après une ionisation dans le rapport 1/9 ;
- isotropie de la diffusion ;
- perte d'énergie par chocs élastiques négligée.

La distribution en énergie après une ionisation n'a que peu d'effet sur les valeurs moyennes de l'avalanche. On note toutefois ce qui est normal, une légère modification de la distribution des intervalles de temps et de distance entre deux collisions ionisantes (figures 50 et 51). Si on essaye de tenir compte de l'allure des sections efficaces différentielles à l'aide des relations (24), on ne constate pas de différence fondamentale sur les résultats.

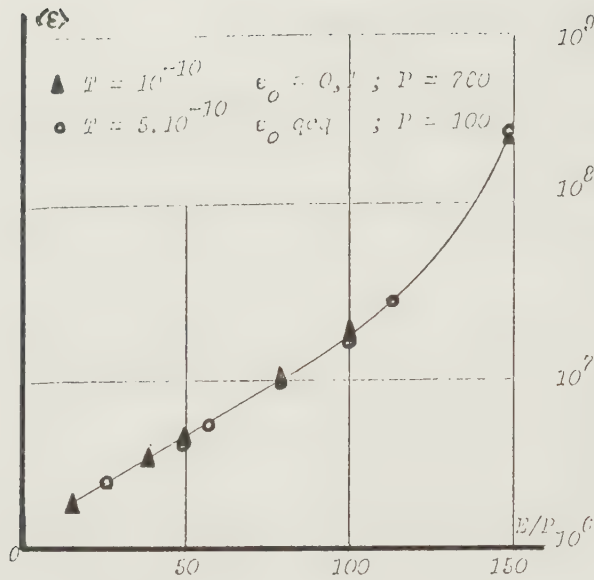


FIGURE 39

VARIATION DE L'ENERGIE MOYENNE AVEC LE CHAMP
ET LA PRESSION A E/P CONSTANT.

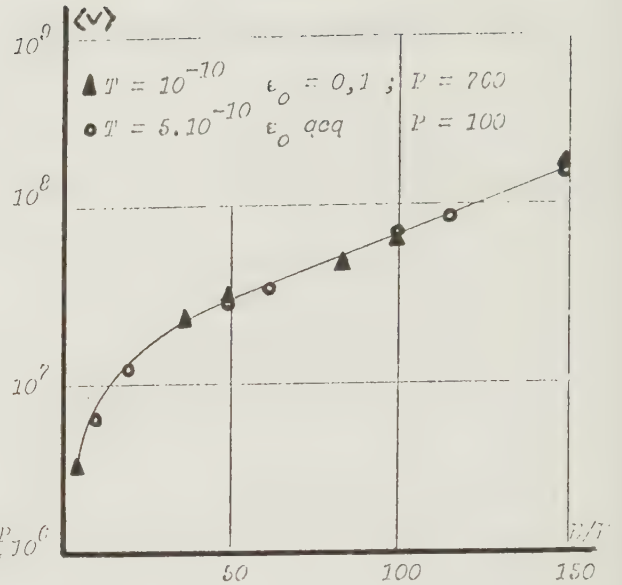


FIGURE 40

VARIATION DE LA VITESSE MOYENNE AVEC LE CHAMP
ET LA PRESSION A E/P CONSTANT.

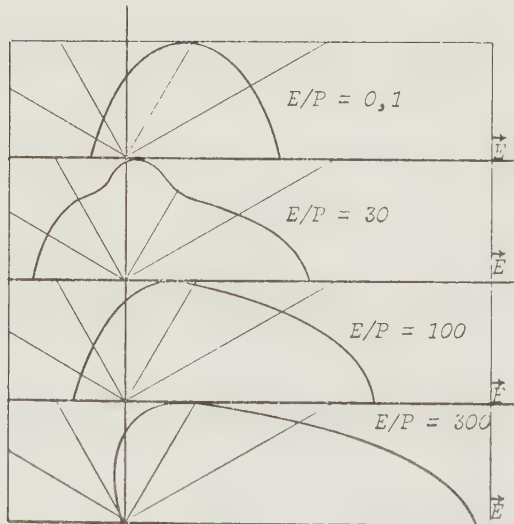


FIGURE 41

INFLUENCE DU CHAMP ELECTRIQUE
SUR LA DISTRIBUTION ANGULAIRE.
 $P = 100 ; \epsilon_0 = 1 ; T = 10^{-10}$.

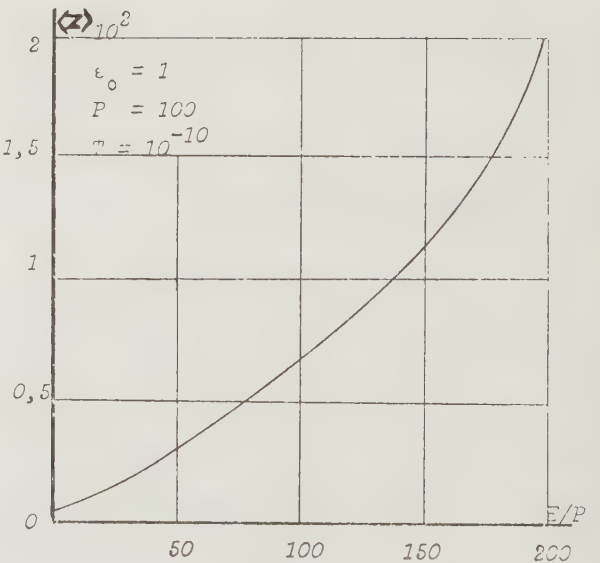


FIGURE 42

INFLUENCE DE E/P SUR LA
DISTANCE MOYENNE.

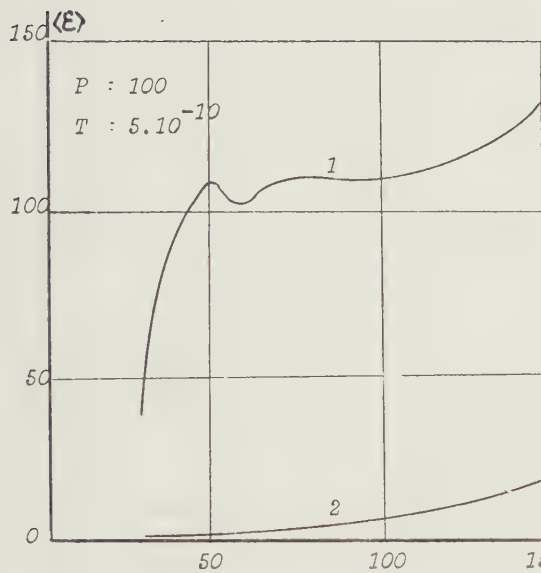


FIGURE 43

GAIN MOYEN D'ENERGIE ENTRE DEUX COLLISIONS

- 1 IONISANTES,
2 QUELCONQUES.

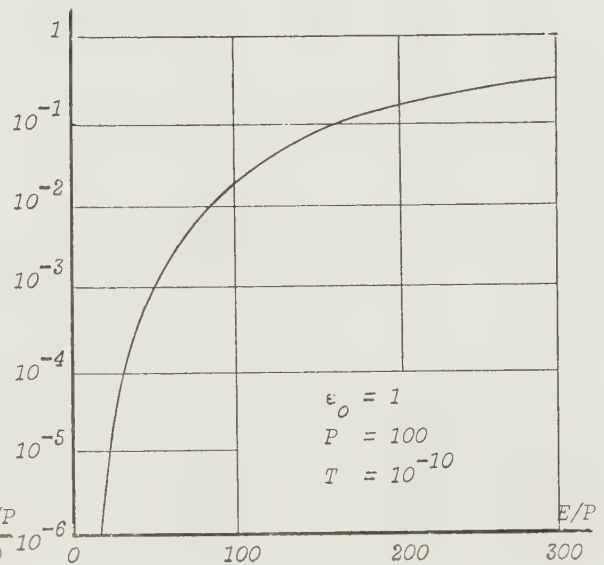


FIGURE 44

RAPPORT DU NOMBRE D'IONISATIONS AU NOMBRE TOTAL
DE COLLISIONS.

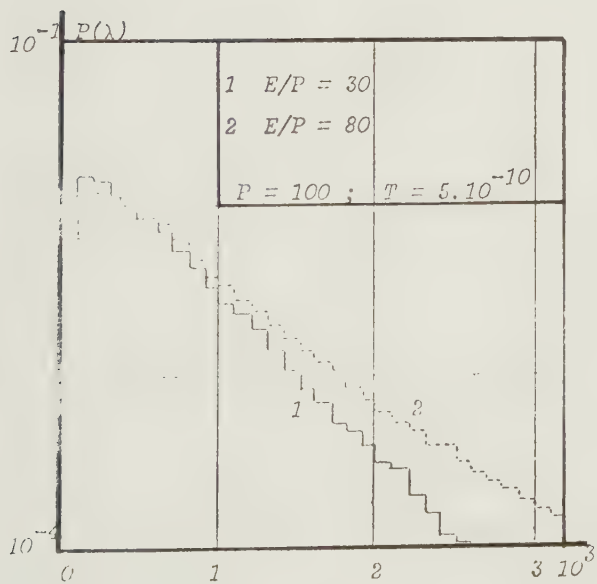


FIGURE 45

DISTRIBUTION DES LIGES PARCOURS.

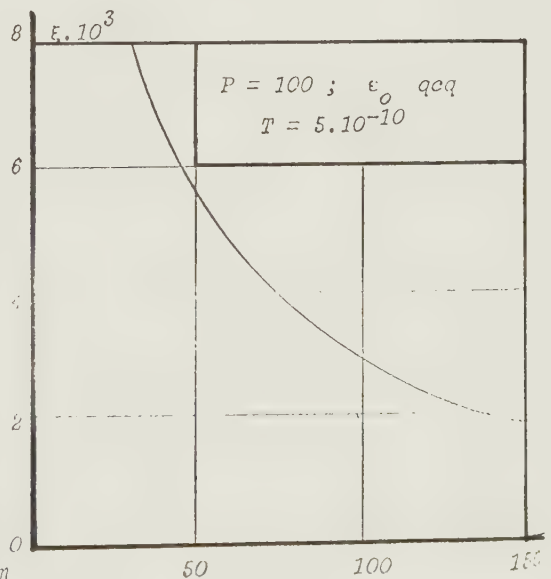


FIGURE 46

VARIATION DU MAXIMUM DE $g(\xi)$ EN FONCTION DE E/P.

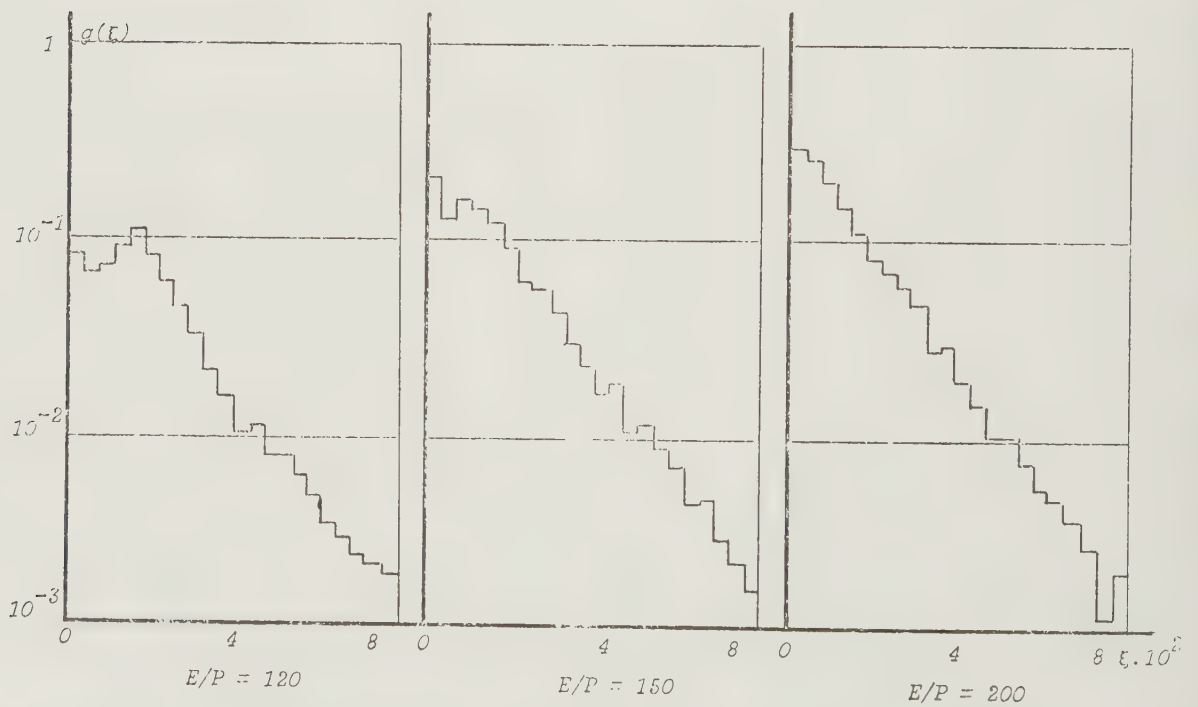
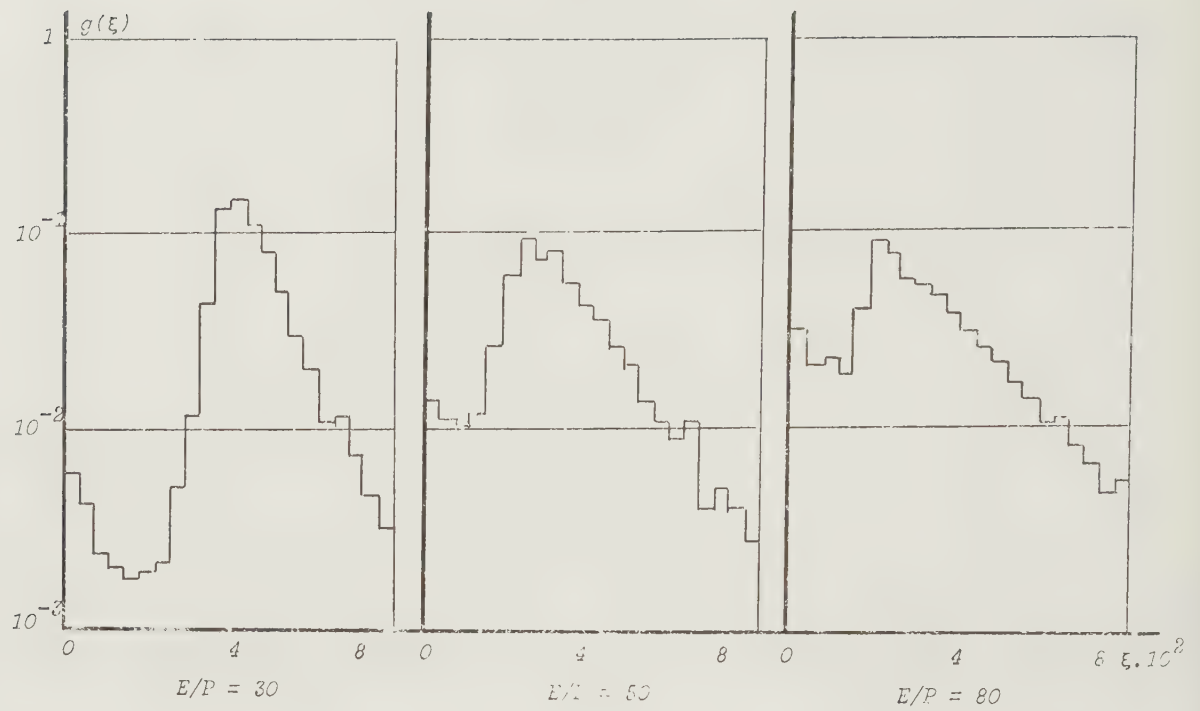


FIGURE 47
EVOLUTION DE $g(\xi)$ AVEC LE CHAMP ELECTRIQUE.
 $P = 100 \quad T = 5 \cdot 10^{-10}$.

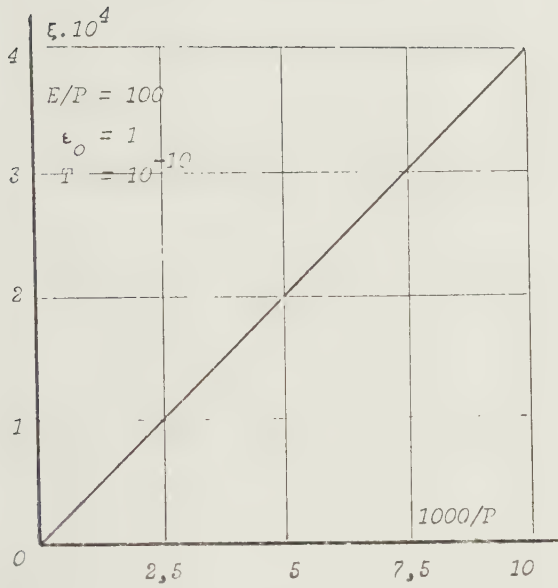


FIGURE 48

POSITION DU MAXIMUM DE $g(\xi)$ EN FONCTION DE $1/P$.

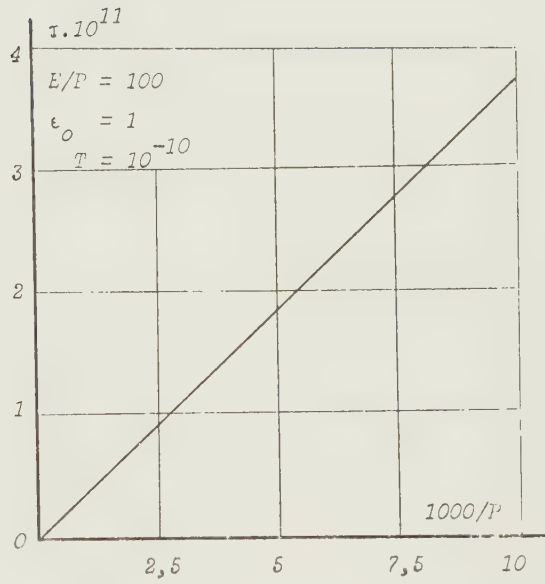


FIGURE 49

POSITION DU MAXIMUM DE $g(\tau)$ EN FONCTION DE $1/P$.

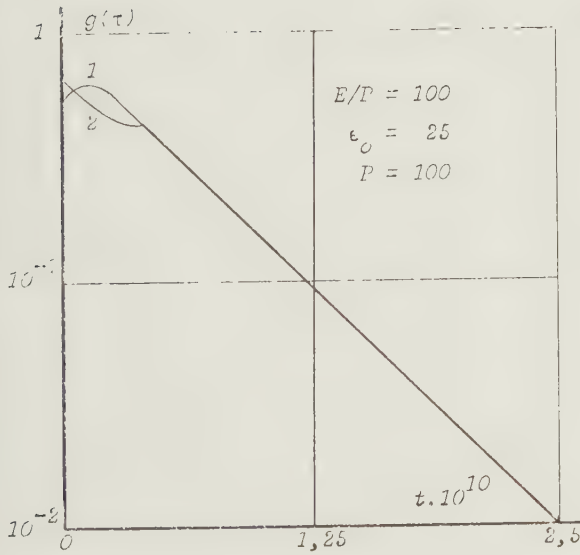


FIGURE 50

INFLUENCE DE LA REPARTITION DE L ENERGIE

RESIDUELLE APRES UNE IONISATION: COURBES LISSEES.

1 : DANS LE RAPPORT 5 : 5

2 : DANS LE RAPPORT 1 : 9

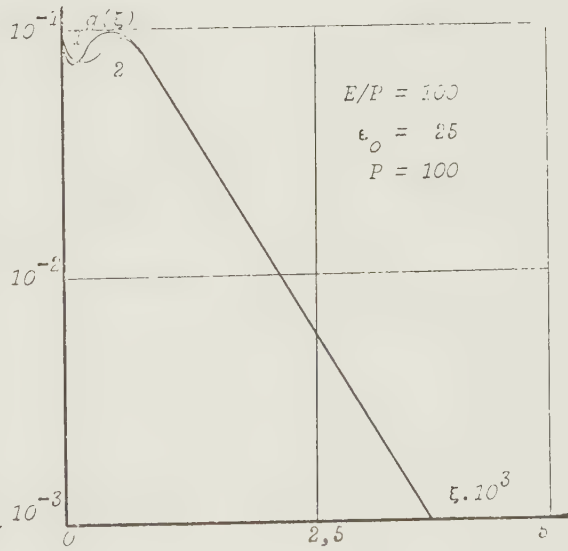


FIGURE 51

INFLUENCE DE LA REPARTITION DE L ENERGIE

RESIDUELLE APRES UNE IONISATION: COURBES LISSEES.

1 : DANS LE RAPPORT 5 : 5

2 : DANS LE RAPPORT 1 : 9

Je n'ai pas pu mettre en évidence l'influence de la perte d'énergie par choc élastique même pour des valeurs de E/ρ de l'ordre de 0,1.

CHAPITRE V

SIMULATION INDIRECTE DE L'EVOLUTION SPATIO-TEMPORELLE D'UNE POPULATION ELECTRONIQUE

XXXXX

V.1. GENERALITES.

L'évolution d'une population d'électrons qui effectuent des collisions ionisantes dans un gaz soumis à un champ électrique continu peut être représentée dans le cadre de divers formalismes. Un des formalismes les plus simples est obtenu lorsqu'on limite la description du processus à celle de l'évolution du nombre total d'électrons $N(t)$ au cours du temps. La nature fluctuante de cette évolution a pour première conséquence que la variable $N(t)$ ainsi définie est a priori une variable aléatoire (plus précisément un processus stochastique). L'étude de cette variable dans le cas d'avalanches électroniques simples (un électron initial) a été d'abord l'objet de travaux expérimentaux (Ra-1). Ces travaux ont conduit à la détermination expérimentale d'histogrammes caractérisant le spectre des valeurs de N pour une valeur de t particulière (qui est pratiquement l'instant d'arrivée du nuage d'électrons au niveau d'une anode collectrice), et dans différentes conditions expérimentales. Il a été montré que la forme des spectres expérimentaux était liée au quotient E/p . Par ailleurs les spectres présentent une allure caractéristique lorsque les conditions expérimentales sont telles que les effets de charge d'espace interviennent.

Dès lors le problème se posait de rendre compte de ces résultats en élaborant un modèle probabiliste de la multiplication. Un tel modèle peut être bâti en partant de la donnée d'un coefficient α représentant une probabilité d'ionisation (densité) pour un électron quelconque du nuage électronique. Plus précisément, αdt représentera la probabilité d'ionisation d'un électron pendant un intervalle dt . On conçoit alors clairement que c'est l'expression choisie pour ce coefficient α , qui déterminera la nature du modèle mathématique.

Ce coefficient doit être fonction des paramètres E et p , mais rien n'indique que l'on doit le considérer a priori comme uniforme dans le temps. En particulier, si on se place à l'échelle des phénomènes élémentaires, on doit s'attendre à ce que cette probabilité d'ionisation ne soit pas la même pour un électron d'énergie faible (tel qu'il en est créé lors des collisions ionisantes électron-molécule) que, par exemple, pour un électron dont l'énergie est voisine de l'énergie électronique moyenne. La probabilité α devra donc être fonction d'un paramètre caractérisant l'évolution

de l'énergie de l'électron au cours d'une génération électronique (on désignera par cette expression la portion de "l'histoire" d'un électron comprise entre deux collisions ionisantes successives). A cet effet, le paramètre le plus approprié est certainement l'énergie elle-même de l'électron (ou mieux sa vitesse). Il apparaît alors que l'étude des fluctuations de la variable $N(t)$ ne peut être menée, en toute rigueur, que dans le cadre d'un formalisme dans lequel la variable énergie (ou vitesse) apparaîtra, c'est-à-dire dans le cadre d'un formalisme microscopique. En fait un tel formalisme adapté à l'étude des fluctuations sur le nombre total de particules du système n'existe actuellement qu'à l'état embryonnaire. L'équation microscopique à laquelle il conduit est une équation intégral-différentielle non linéaire dont la complexité (liée à son caractère non linéaire) semble hors de proportion avec le but poursuivi qui est l'étude des fluctuations d'une grandeur macroscopique. On a été ainsi conduit à choisir un paramètre d'évolution τ sur une génération électronique conduisant à une équation d'évolution de $N(\tau)$ plus simple : ce paramètre τ n'est autre que "l'âge" de l'électron, c'est-à-dire le temps compté à partir de la dernière collision ionisante à laquelle l'électron a "participé", en tant que particule primaire ou secondaire. Il est possible de montrer que le choix d'un tel paramètre d'évolution n'est pas incompatible avec une description rigoureuse du processus $N(t)$. Par contre il est responsable du caractère nécessairement incomplet de l'équation d'évolution, caractère lié à l'impossibilité de déterminer la dépendance $\alpha(\tau)$ de la probabilité d'ionisation à l'âge τ de l'électron. Cette dépendance devra donc être posée a priori ou à partir de considérations empiriques. Autrement dit, à la notion de description microscopique de l'évolution d'un système on a substitué la notion de modèle représentatif. On doit s'attendre à ce que la probabilité d'ionisation dépende d'autres paramètres que E, p, τ .

En particulier, pour des avalanches électroniques de grande amplification, la prise en considération des effets de charge d'espace conduit à introduire une dépendance de α avec le nombre effectif n d'électrons existant dans l'avalanche à l'instant considéré ($n = 1, 2, 3 \dots$ représente les valeurs discrètes possibles de la variable aléatoire $N(t)$). Enfin même si ce dernier phénomène ne se manifeste pas, α doit dépendre du paramètre t représentant le temps, compté à partir de la création du premier électron et qui repère l'évolution globale du processus.

On peut penser en effet qu'il doit exister des circonstances expérimentales pour lesquelles il n'y a pas "équilibre microscopique", c'est-à-dire pour lesquelles le comportement statistique d'un électron au cours d'une génération électronique particulière, dont l'origine est une certaine date t_1 , n'est pas le même que celui que l'on pourrait observer à une date t_2 ultérieure (ceci se produit très certainement pour les très fortes valeurs du paramètre E/p).

En résumé, un modèle stochastique de l'avalanche électronique doit en toute généralité s'appuyer sur la donnée d'un coefficient d'ionisation α dépendant d'un grand nombre de paramètres E, p, τ, t, n . Néanmoins, dans certaines circonstances expérimentales (E/p pas trop élevé), on pourra considérer comme une bonne hypothèse de départ l'existence de "l'équilibre microscopique" (bien qu'il soit certain que cet équilibre n'est pas réalisé dans le tout premier stade de l'évolution de l'avalanche (cf. chapitre IV)).

Dans ces conditions, on peut montrer (Ch-3) que le coefficient $\alpha(\tau)$ (ou $\alpha(\xi)$) s'exprime simplement en terme des fonctions $g(\tau)$ (ou $g(\xi)$) (distribution des intervalles de temps (ou des distances) entre deux collisions ionisantes) qui ont été obtenues au cours du chapitre précédent. On a :

$$a(\tau) = \frac{g(\tau)}{1 - G(\tau)} \quad (26a)$$

$$a(\xi) = \frac{g(\xi)}{1 - G(\xi)} \quad (26b)$$

avec

$$G(x) = \int_0^x g(y) dy \quad (26c)$$

qui représente la fonction de répartition de la variable aléatoire x ,

En général, on adopte pour $a(\tau)$ (ou $a(\xi)$) un modèle très simple (Le-1) du type échelon représenté sur la figure 52-c. On peut tenter une justification de ce modèle par le raisonnement suivant:

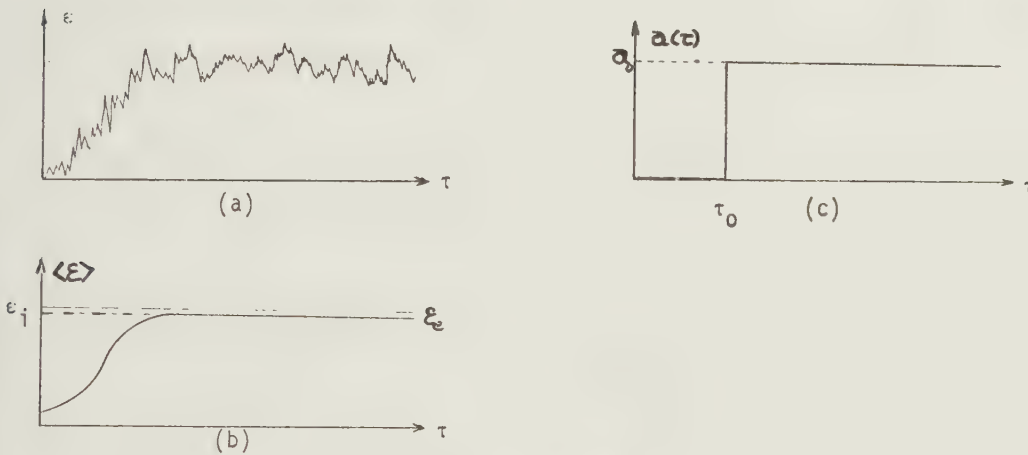


FIGURE 52

- Supposons que l'on puisse "suivre" en fonction de l'âge τ l'énergie instantanée ϵ d'un électron au cours d'une génération électronique. On obtiendrait une courbe chaotique que l'on a représenté schématiquement sur la figure 52-a. L'allure générale de cette courbe présentera deux phases.

- La première pour laquelle (aux fluctuations près dues aux collisions élastiques), l'énergie présente une tendance de croissance.

- La seconde où le bilan entre perte et gain s'équilibre, l'énergie demeurant en moyenne stationnaire (aux fluctuations près).

- Sur la figure 52-b, j'ai représenté l'allure de la variation de l'énergie moyenne en fonction de τ telle qu'on pourrait l'obtenir en moyennant sur un grand nombre de générations électroniques. La valeur de $\langle E \rangle$ à l'équilibre, $\langle E_e \rangle$ a été représentée inférieure à ϵ_i , énergie de première ionisation. En fait pour des valeurs de E/p suffisamment élevées on pourra obtenir l'inégalité opposée $\langle E_e \rangle > \epsilon_i$.

L'examen de la courbe 52-b montre alors que dans une première phase (faible valeur de τ) les fluctuations de $\mathcal{E}$ n'auront pas une amplitude suffisante pour que certains électrons puissent avoir une énergie supérieure à $\mathcal{E}_i$ et ioniser (d'où la nullité de $\alpha(\tau)$ aux faibles valeurs de τ). Par contre si τ est suffisamment grand et si l'intensité E du champ électrique est suffisante pour que $\langle \mathcal{E}_e \rangle$ soit proche de $\mathcal{E}_i$, les processus d'ionisation deviendront possibles, l'uniformité de $\alpha(\tau)$ est alors une conséquence de l'existence d'un palier dans la courbe $\mathcal{E}(\tau)$. L'hypothèse simplificatrice effectuée ci-dessus consiste donc à admettre que la transition entre les deux zones est suffisamment rapide pour pouvoir être assimilée à un échelon (dont les paramètres α_0 et τ_0 sont des fonctions inconnues de E et p , (figure 52-c).

Le modèle précédent de $\alpha(\tau)$ ne se justifie que si les électrons primaires et secondaires issus d'une collision ionisante ont tous deux une énergie très faible ; on sait qu'il n'en est rien en général (Go-1). Si l'énergie de l'électron primaire est suffisamment importante, un des deux électrons au moins issus de la collision est susceptible d'ioniser indirectement. J'ai donc été amené à introduire des modèles $\alpha(\tau)$ pouvant rendre compte de cette probabilité (figure 53 a et b).

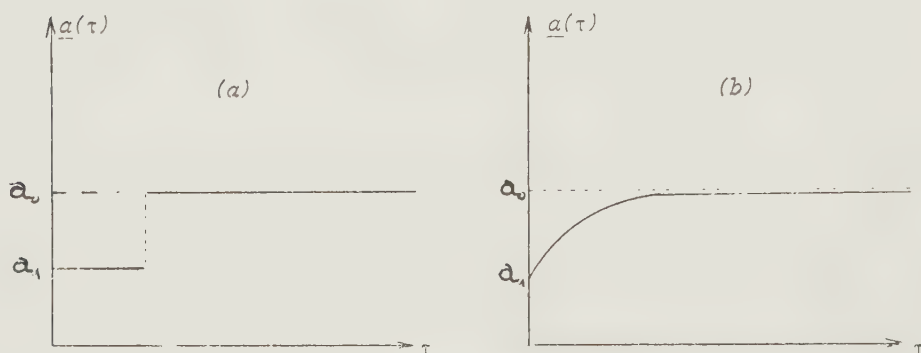


FIGURE 53

On va voir, dans ce qui suit, que ces modèles constituent en fait une très bonne représentation de la réalité.

V.2. METHODE DE CALCUL.

Le principe général de la méthode est indiqué par l'organigramme ci-dessous (figure 54). L'espace entre les électrodes est divisé en N tranches (N de l'ordre de 1 000). Le libre parcours d'ionisation ξ de l'électron est obtenu par échantillonnage à partir de la densité de probabilité $g(\xi)$. Un électron est suivi jusqu'à l'anode. Chaque tranche où il y a multiplication est mise en mémoire puis lorsque l'électron initial a atteint l'anode, l'histoire du premier électron créé est alors suivie et le processus continue jusqu'à ce que tous les électrons créés aient atteint

l'anode. Tous les cas de la figure 55 sont envisagés. Le nombre d'électrons par tranche est mis en mémoire. On obtient ainsi la variation du nombre d'électrons en fonction de la distance entre les électrodes ainsi que les histogrammes de $P(n)$ (probabilité d'avoir n électrons à la distance d) pour diverses amplifications.

L'obtention des libres parcours d'ionisation à partir de $g(\xi)$ s'effectue de deux manières distinctes :

1 - Par inversion de la relation donnant $G(\xi)$ dans le cas des figures 52-c ou 55-a.

2 - Par une méthode de rejet mise au point par PATAU (Pa-1) pour les fonctions $g(\xi)$ obtenues au chapitre IV (histogramme "expérimental").

IV.3. RESULTATS.

La courbe 56 montre une fonction $g(\xi)$ obtenue par lissage d'un histogramme "expérimental" ; la figure 57 montre la variable $\alpha(\xi)$ correspondante ; elle justifie pleinement la modification (figure 53-a) apportée au modèle de LEGLER (figure 52-b).

La courbe 58 montre la croissance du nombre d'électrons pour différentes avalanches ainsi que la croissance du nombre moyen d'électrons (moyenne prise sur 1 000 avalanches) ; elle est comparable à la courbe théorique obtenue numériquement par LEGLER (Le-1).

La courbe 59 représente la distribution du nombre de porteurs pour différentes avalanches obtenues dans les mêmes conditions "expérimentales".

Sur la courbe 60, j'ai représenté la variation du coefficient $\alpha = (d_1 - d_2)^{-1} \log(n_1/n_2)$ en fonction de la distance, d , de la cathode.

Si on suit la variation de ξ_0 ou τ_0 en fonction de E/p , on obtient des courbes identiques à la figure 46 qui sont en contradiction apparente avec les conclusions de LEGLER sur la tendance markovienne de l'avalanche pour les faibles valeurs de E/p . Le sens de variation de ξ_0 s'explique en tenant compte de l'énergie moyenne des électrons et du gain d'énergie acquis par les électrons dans le champ électrique sur une distance ξ . Pour de fortes valeurs du champ électrique (ou du rapport E/p à pression fixée), l'énergie moyenne des électrons est supérieure au seuil d'ionisation (figure 39). Si l'énergie de l'électron secondaire est inférieure au seuil d'ionisation, le gain d'énergie conféré par le champ est tel que la distance à parcourir pour atteindre ce seuil sera courte (figure 43) ; en moyenne ξ_0 sera donc faible. Au contraire, on voit que pour des basses valeurs de E/p , ξ_0 sera plus important. L'influence de la valeur de l'énergie moyenne des électrons sur le comportement du coefficient $\alpha(\xi)$ est confirmée par la courbe 28. La stabilité des fonctions $g(\xi)$ est obtenue dès qu'un nombre suffisant d'ionisations a eu lieu (de l'ordre de 5).

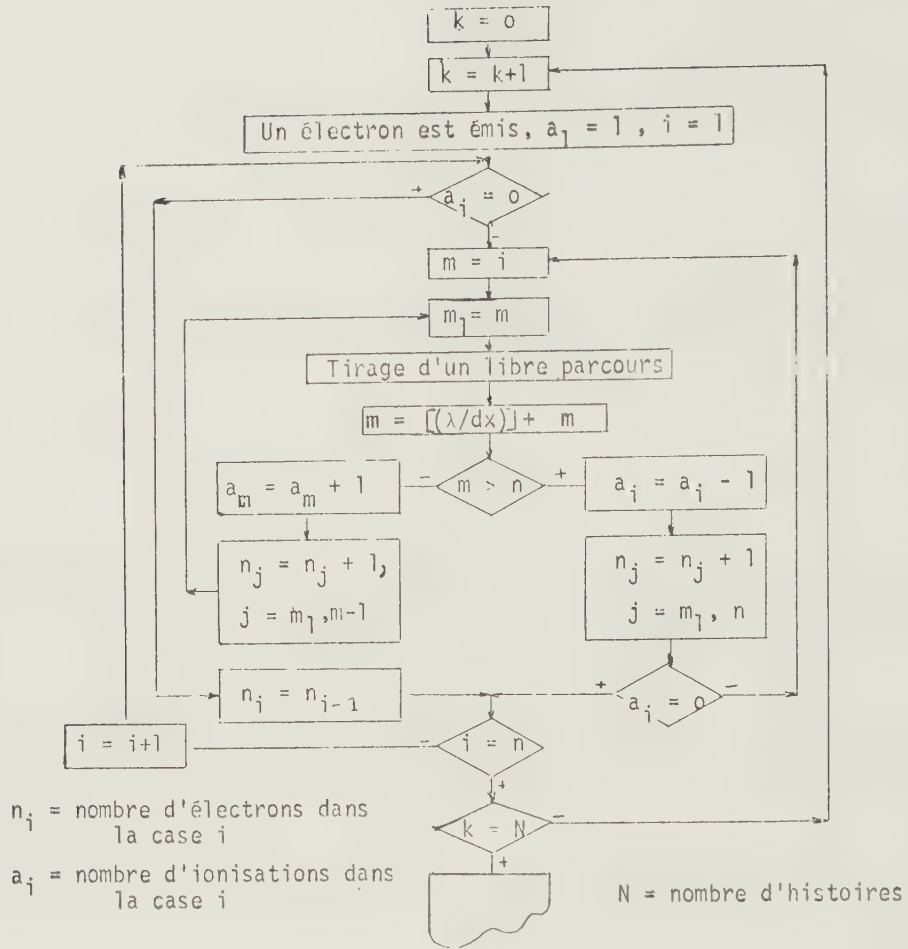


FIGURE 54

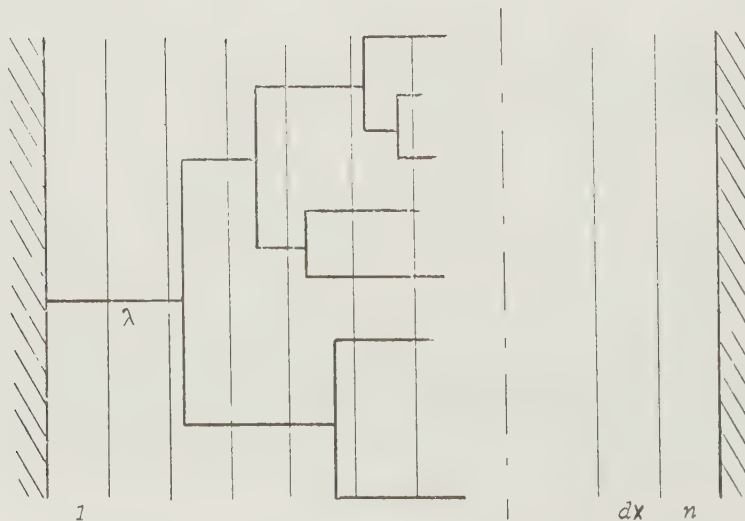


FIGURE 55

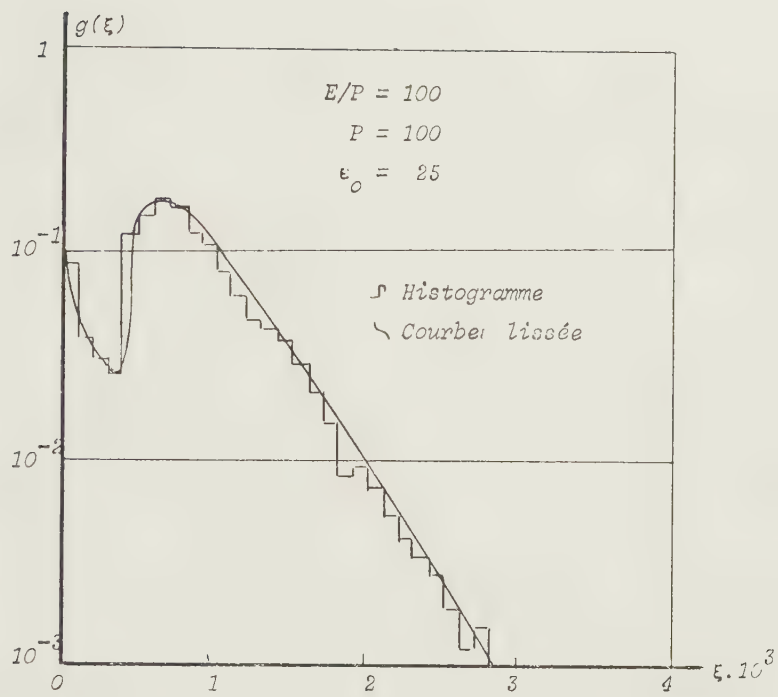


FIGURE 56

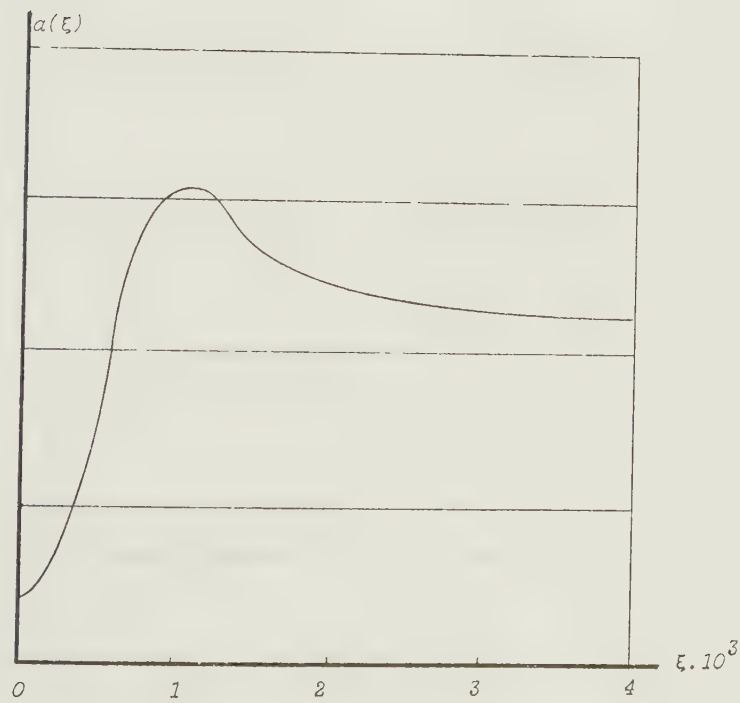


FIGURE 57

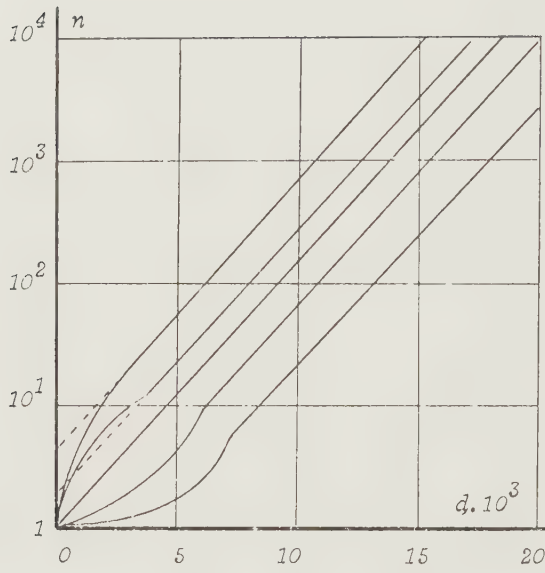


FIGURE 58

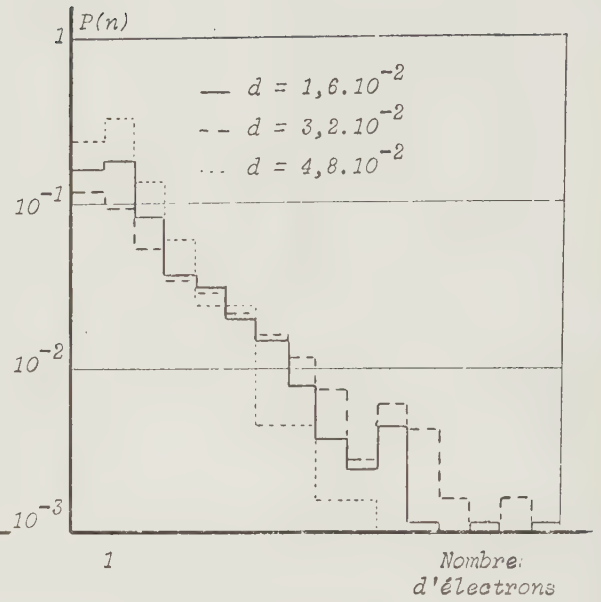


FIGURE 59

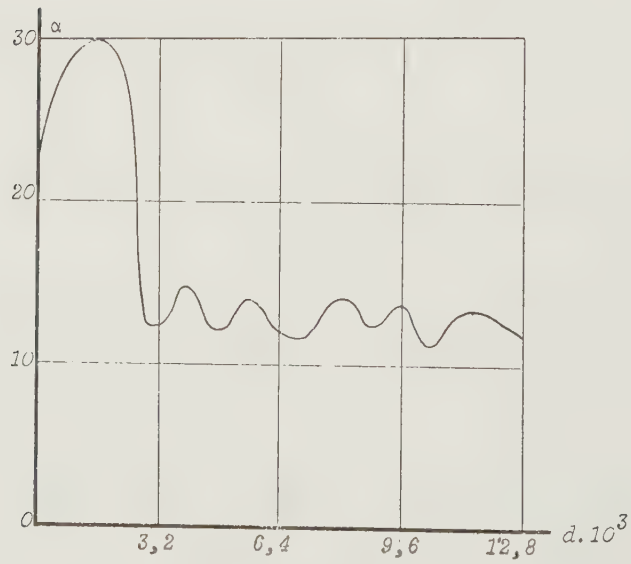


FIGURE 60

C I N Q U I E M E P A R T I E

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE RELATIVE AUX SECTIONS EFFICACES
DE COLLISION

XXXXX

Comme je l'ai déjà dit dans l'introduction de ce travail, l'étude bibliographique qui suit est divisée en deux parties. Dans la première, j'effectue une analyse systématique des données existantes dans la littérature avec le seul souci de rassembler le maximum d'informations quelle que puisse être la complexité de celles-ci. Dans la deuxième partie, au contraire, je propose un modèle simplifié, tenant compte globalement des résultats obtenus au cours de la première étape et choisi de telle manière que la détermination des sections efficaces puisse s'effectuer rapidement. C'est ce modèle que j'ai utilisé en pratique dans tous les calculs de ce mémoire. Il est clair cependant que le choix effectué ici n'a rien de restrictif et que les méthodes que j'ai développées au cours de ce travail sont valables quel que soit le modèle de section efficace choisi.

CHAPITRE I

SECTIONS EFFICACES DU TYPE I (BIBLIOGRAPHIE GENERALE)

XXXXX

On trouve dans la littérature un grand nombre de résultats expérimentaux et théoriques sur les sections efficaces de collision électron-atome dans l'hélium. Il est toujours difficile de faire un choix car les valeurs diffèrent fortement selon le type d'expérience qui a servi à les déterminer. D'autre part, si les résultats proposés sont la conséquence de calculs théoriques, il est rare que l'accord soit parfait avec les données expérimentales de même qu'avec d'autres calculs utilisant des hypothèses différentes. Cette situation est particulièrement critique en ce qui concerne les probabilités d'excitation dans la mesure où l'on juge nécessaire de considérer un grand nombre de niveaux. Pour essayer de clarifier un peu les choses, il me paraît nécessaire d'effectuer une comparaison systématique des différents résultats présents dans la littérature. Une étude bibliographique a déjà été réalisée par LABORIE et alii (La-3). Cependant l'ensemble des résultats qui y est proposé est trop fragmentaire. Il est alors indispensable de compléter la bibliographie existante en tenant compte des travaux théoriques. En effet, comme on va le voir, la comparaison des données expérimentales et théoriques facilite considérablement le choix à effectuer.

I.1. SECTIONS EFFICACES DE COLLISION ELASTIQUE.

I.1.1. Résultats expérimentaux.

A ma connaissance, il existe quatre déterminations de la section efficace de collision élastique (figure 1) (Go-1), (Br-3), (Ra-2), (No-1). Seules les mesures de GOLDEN et BANDEL sont récentes (1965), les trois autres ayant été effectuées avant 1931. Bien que la technique utilisée soit la même dans chaque cas, les écarts sont très importants. Par ailleurs, les courbes A et C (RAMSAUER-KOLLATH, NORMAND) présentent un certain nombre d'oscillations aux faibles énergies.

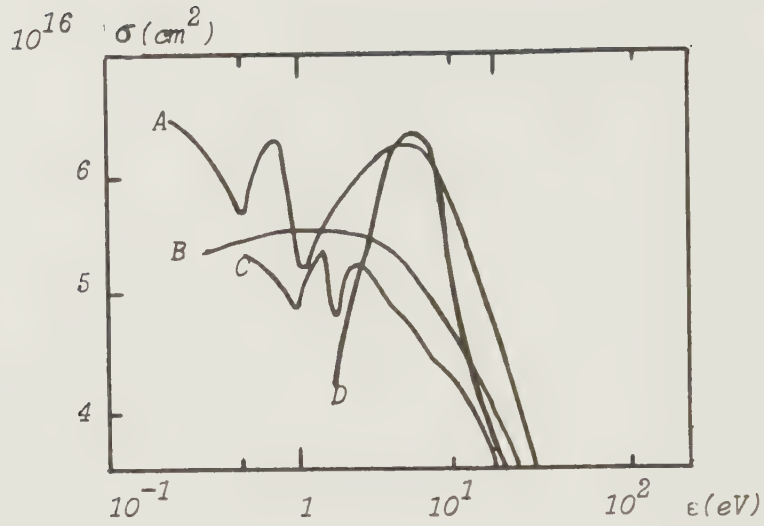


FIGURE 1

SECTIONS EFFICACES DE COLLISION ELASTIQUE.

A : RAMSAUER ET KOLLATH ;

B : GOLDEN ET BANDEL ;

C : NORMAND ;

D : BRODE.

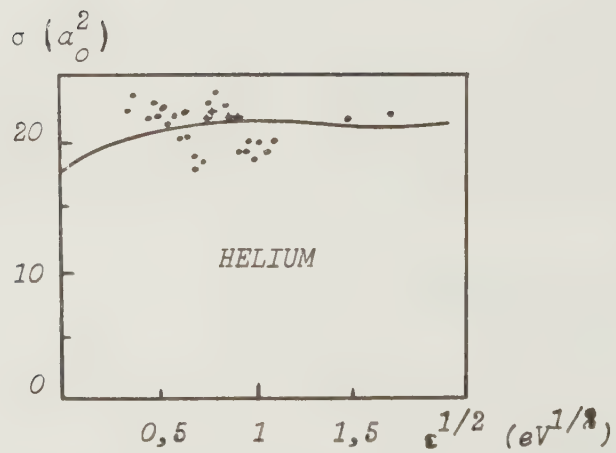


FIGURE 2

SECTION EFFICACE DE COLLISION ELASTIQUE.

D'APRES O'MALLEY.

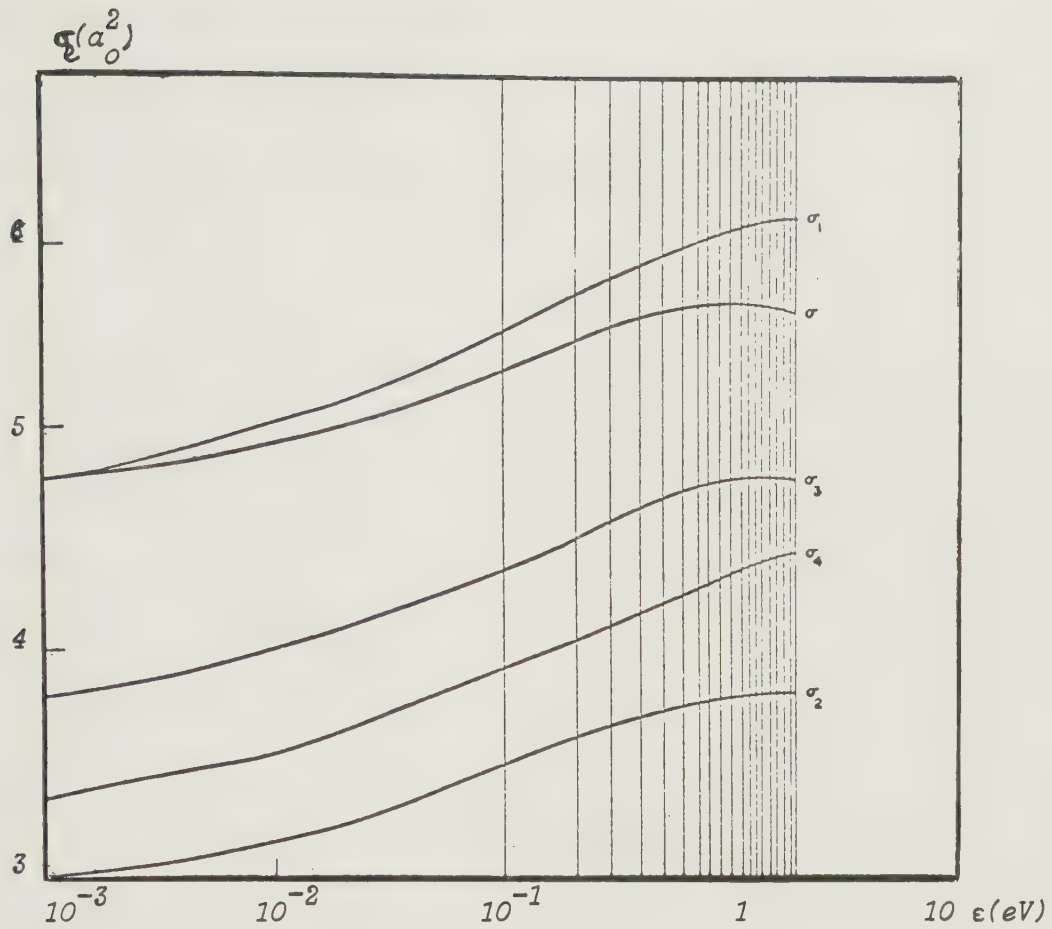


FIGURE 3

σ : SECTION EFFICACE DE COLLISION ELASTIQUE
 σ_ℓ : SECTIONS EFFICACES DE TRANSPORT D'ORDRE ℓ ($\ell=1,2,3,4$).
 D'APRES FOX.

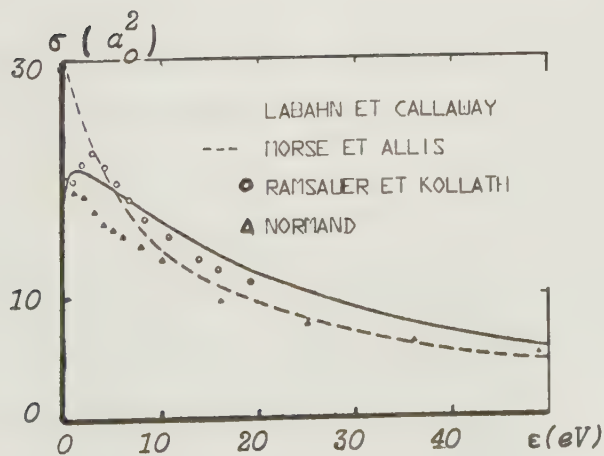


FIGURE 4

SECTIONS EFFICACES DE COLLISION ELASTIQUE.

Le problème de l'existence ou non d'une telle structure fine dans la section efficace totale pour les électrons dans l'hélium a été étudié systématiquement par CROMPTON, ELFORD et JORY (Cr-1). Ces auteurs concluent qu'il est peu probable qu'une telle structure puisse exister. Par ailleurs, elle n'apparaît pas dans les mesures de GOLDEN et BANDEL, alors que l'on peut raisonnablement supposer que la technologie utilisée par ces auteurs était plus élaborée que celle dont disposait RAMSAUER et KOLLATH ou NORMAND.

I.1.2. Déterminations théoriques.

Il est intéressant d'examiner à la lumière des résultats précédents le comportement aux faibles énergies de la section efficace totale de collision élastique à partir des données théoriques. Dans ce domaine, le problème ne peut être abordé que de manière quantique. De façon générale, l'étude théorique nécessite la prise en considération de deux effets importants : les effets d'échange et de distorsion. On tient compte de l'effet d'échange en antisymétrisant la fonction d'onde totale. L'effet de distorsion (ou effet de polarisation) se produit par suite de l'action sur les électrons atomiques, du champ coulombien de l'électron incident. Inversement, la polarisation de l'atome cible produit un potentiel qui agit sur l'électron diffusé. Lorsque cet électron a une énergie faible, les électrons atomiques se polarisent et s'alignent adiabatiquement sur la position de l'électron diffusé. Aux grandes distances, le potentiel de polarisation le plus important est le potentiel du dipôle α/r^4 où 2α est la polarisabilité de l'atome. L'hypothèse adiabatique revient à admettre que le potentiel du dipôle demeure le phénomène prépondérant, quelle que soit la position de l'électron. Cela implique en particulier que l'on suppose que la force d'interaction est indépendante de la vitesse même lorsque l'électron diffusé se trouve au voisinage de l'atome. Or, comme le signalent PU et CHANG (Pu-1), l'hypothèse adiabatique tend à surestimer aux hautes énergies l'effet de polarisation. Il est clair maintenant que les différences entre les études théoriques résultent essentiellement du traitement qui aura été adopté pour l'effet de distorsion. En particulier, O'MALLEY, SPRUCH et ROSENBERG (Om-1) ont utilisé la méthode de la portée effective appliquée d'ordinaire aux problèmes nucléaires, en considérant le potentiel du dipôle comme étant l'interaction la plus importante qui détermine la diffusion pour une énergie limite nulle. Malheureusement, cette méthode n'est valable que pour des énergies très faibles. En particulier, elle peut donner d'excellents résultats si l'on veut prolonger vers zéro des résultats expérimentaux (Om-1), (Fo-1) (figures 2 et 3).

En adoptant l'hypothèse adiabatique, LABAHN et CALLAWAY (La-1) obtiennent la section efficace de collision élastique jusqu'à 50 eV. Le tableau ci-après (La-1) permet de comparer les résultats obtenus par ces auteurs et par O'MALLEY au moyen de la théorie du parcours effectif.

TABLEAU 1

$\mathcal{E}$ (eV)	Echange adiabatique (a_0^2)	Théorie du parcours effectif (a_0^2)
0,00136	16,425	16,483
0,034	17,749	17,632
0,136	18,958	18,529
0,50	20,201	19,220
0,85	20,541	19,276
1,00	20,602	19,253
2,00	20,409	18,891

Les sections efficaces sont exprimées en σ_0^2 . La figure 4 représente les valeurs obtenues par LABAHN et CALLAWAY et permet de les comparer aux résultats de NORMAND, RAMSAUER et KOLLATH, MORSE et ALLIS (Mo-1). Les calculs de MORSE et ALLIS ne font intervenir que l'effet d'échange et la partie à haute énergie se situe en-dessous des valeurs de LABAHN et CALLAWAY. Aucune structure fine n'apparaît dans la courbe obtenue par LABAHN et CALLAWAY. Les deux articles les plus récents et les plus élaborés sur le sujet ont été publiés en 1966, par LABAHN et CALLAWAY (La-2) d'une part et PU et CHANG d'autre part. LABAHN et CALLAWAY améliorent leurs calculs en corrigeant l'approximation adiabatique de façon à introduire un modèle d'interaction dépendant de la vitesse. Leurs nouvelles valeurs sont bien plus proches des résultats expérimentaux, en particulier de ceux de RAMSAUER et KOLLATH. Par ailleurs, PU et CHANG proposent un modèle dans lequel l'hypothèse adiabatique n'est plus effectuée (méthode du potentiel optique) et obtiennent pour les hautes énergies (20 eV) des valeurs qui se comportent comme les résultats de LABAHN et CALLAWAY. La figure 5 permet de comparer les sections efficaces de PU et CHANG aux premiers résultats de LABAHN et CALLAWAY.

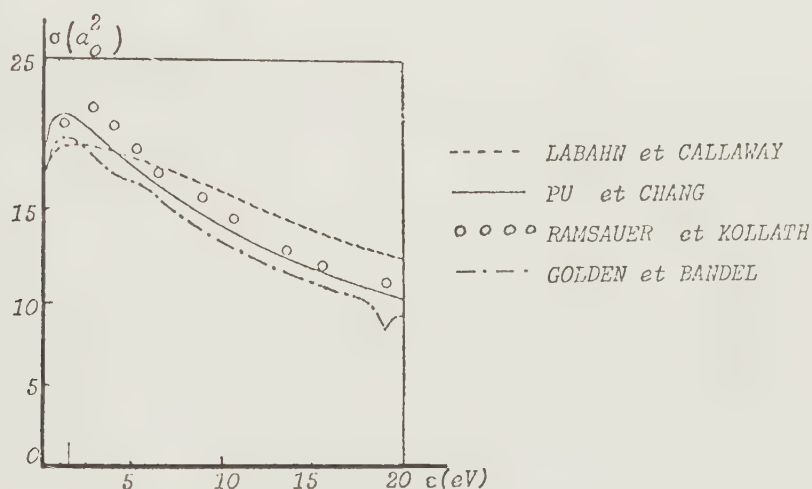


FIGURE 5

1.2. SECTIONS EFFICACES POUR LE TRANSFERT DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT.

Une détermination expérimentale directe de cette section efficace est impossible. On peut cependant effectuer un calcul semi-empirique en utilisant des mesures de la vitesse de dérive et en comparant ces valeurs à celles obtenues au moyen de la fonction de distribution de MARGENAU-DAVYDOV dans laquelle on a injecté une fonction arbitraire pour la section efficace de transfert de la quantité de mouvement. On modifie alors cette section efficace jusqu'à ce que les vitesses de dérive calculées soient égales, avec une précision choisie, aux valeurs expérimentales. C'est la méthode qui a été employée par CROMPTON et alii (Cr-1). Elle conduit en particulier à des résultats en accord remarquable avec les calculs d'échange dynamique de LABAHN et CALLAWAY, ainsi qu'avec les résultats de PU et CHANG (figures 6, 7 et 8).

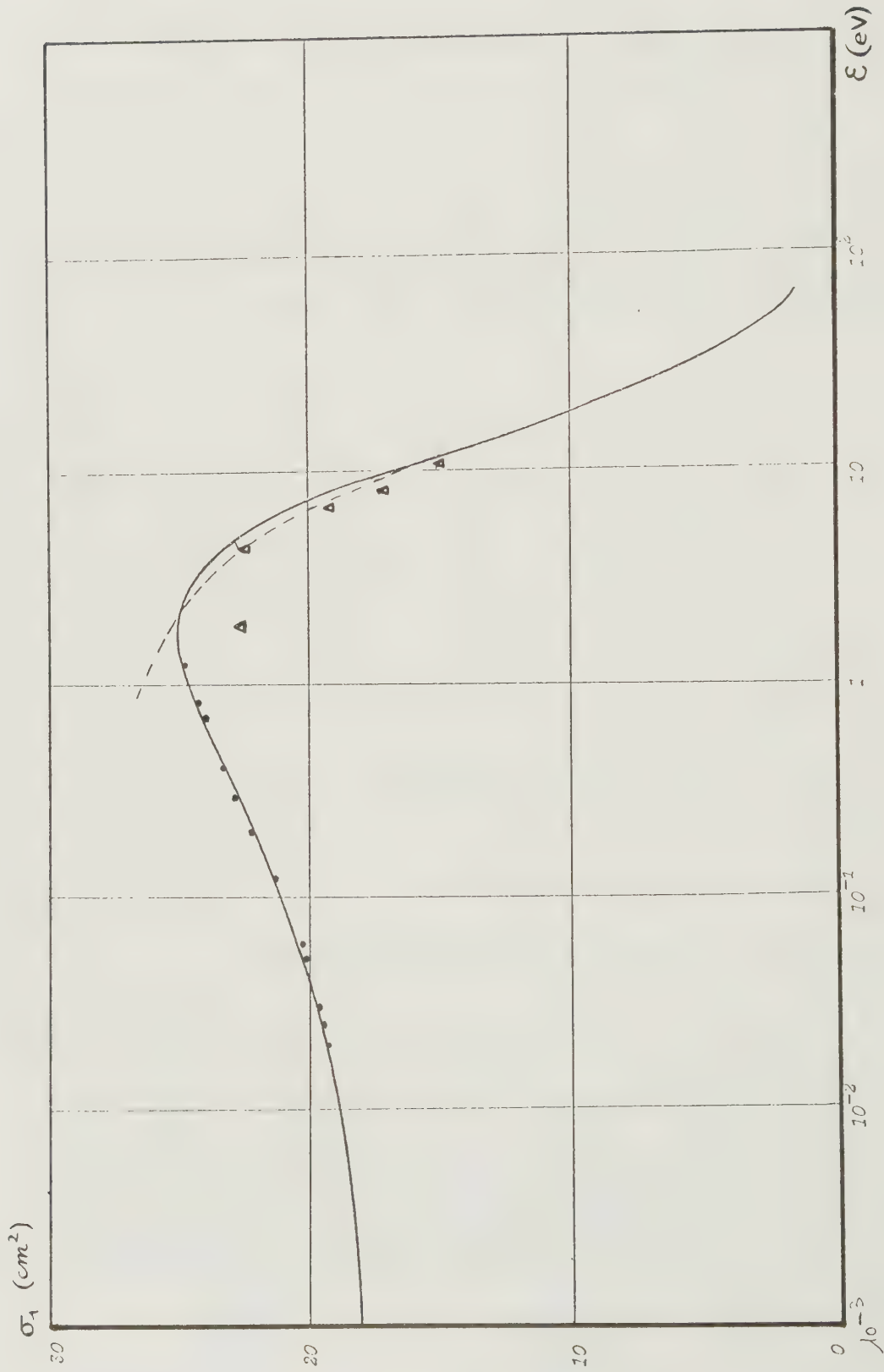


FIGURE 6
SECTIONS EFFICACES DE TRANSFERT POUR LA QUANTITE DE MOUVEMENT.
--- PU ET CHANG ;
 $\Delta \Delta \Delta$ RAMSAUER ET KOLLATH ;
— CROFTON ET ELFORD.

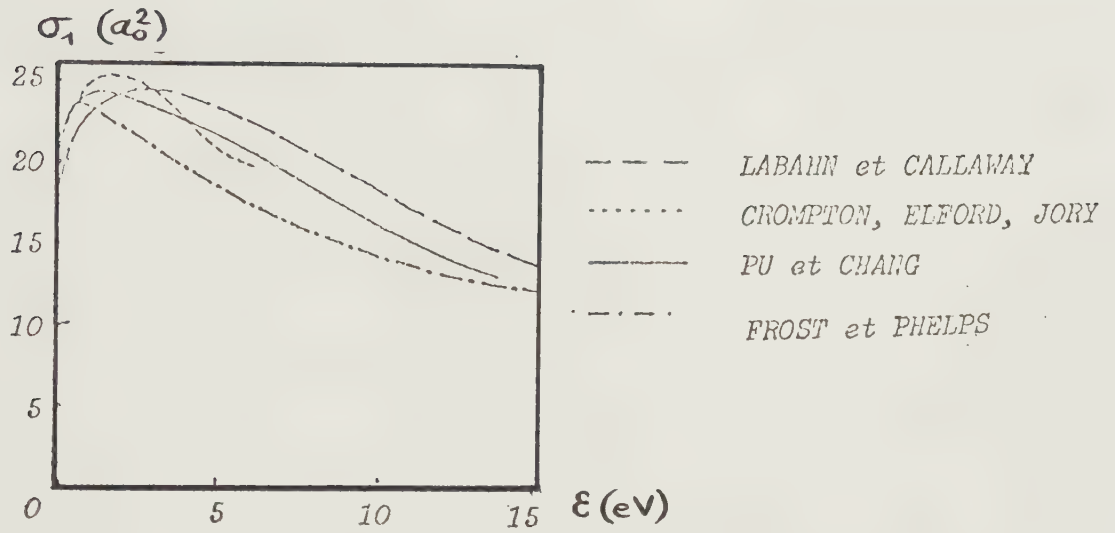


FIGURE 7

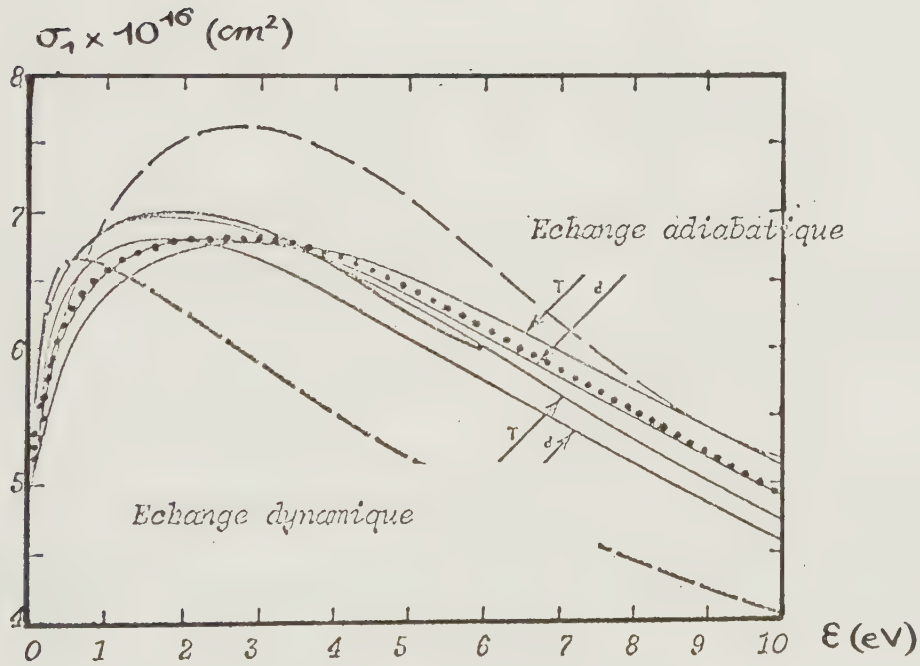


FIGURE 8

SECTIONS EFFICACES POUR LE TRANSFERT DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT.

- CROMPTON, ELFORD ET JORY ;
- - FROST ET PHELPS ;
- - BAUER ET BROWNE ;
- - LABAHN ET CALLAWAY ;
- WILLIAMSON ET MAC DOWELL.

1.3. SECTIONS EFFICACES D'EXCITATION DES NIVEAUX OPTIQUES.

En général les sections efficaces d'excitation sont assez mal connues et les résultats que l'on trouve dans la littérature très fragmentaires. Heureusement, par suite de son faible numéro atomique, le cas de l'hélium est assez bien connu et l'on va voir qu'il existe à la fois dans les domaines théoriques et expérimentaux un ensemble suffisamment complet de résultats.

Une synthèse des données numériques a été effectuée par DRAWIN (Dr-1) en réunissant et unifiant pour une transition donnée l'ensemble des résultats connus relatifs à cette transition. Il a obtenu un faisceau cohérent de résultats pour un grand nombre de niveaux d'excitation (transitions à partir du niveau fondamental ou de niveaux déjà excités). De plus il fournit les expressions analytiques des sections efficaces en dégageant des expressions générales valables pour un système de transitions d'un type donné (transition optiquement interdite, sans changement de multiplicité par exemple, etc...), les diverses expressions étant exprimées en fonction de paramètres physiques tels que forces d'oscillateurs, etc...

Il m'a paru intéressant de comparer les sections efficaces proposées par DRAWIN (de type semi-expérimentales) à des valeurs obtenues par des calculs théoriques. Un ensemble très complet est donné par OCHKUR (Oc-1) qui a calculé les sections efficaces dans l'hélium, pour un grand nombre de transitions, OCHKUR utilise l'approximation de BORN-OPPENHEIMER, dans laquelle, il est tenu compte de l'effet d'échange, et où on suppose que les fonctions d'onde de l'électron incident et diffusé ne sont pas perturbées lors de l'interaction. De manière générale, l'approximation de BORN-OPPENHEIMER conduit à des valeurs beaucoup trop grandes pour les faibles énergies. L'approximation d'OCKKUR consiste à développer l'amplitude de diffusion relative à l'effet d'échange en série de puissances de κ^{-1} (κ , nombre d'onde relatif à l'électron incident). Si l'on désigne l'amplitude de diffusion relative à l'effet d'échange par $g_n(\theta, \varphi)$ on obtient dans le cas de l'hélium :

$$g_n(\theta, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int \left(\frac{1}{r_{31}} + \frac{1}{r_{32}} - \frac{2}{r_3} \right) \exp \left[i(\vec{k} \cdot \vec{r}_2 - \vec{k}' \cdot \vec{r}_1) \right] \times \quad (1)$$

$$\times \Psi_n^*(\vec{r}_2, \vec{r}_3) \Psi_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \underline{dr_1} \underline{dr_2} \underline{dr_3}$$

où $\Psi_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ et $\Psi_n^*(\vec{r}_2, \vec{r}_3)$ sont les fonctions atomiques correspondant à l'état initial et final. Si on se limite au deuxième terme du développement en série de puissances de κ^{-1} , on obtient :

$$g_n(\theta, \varphi) = g_n^{(1)}(\theta, \varphi) = 2\kappa^{-2} \int \Psi_n^*(\vec{r}_2, \vec{r}_1) \Psi_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}_1) \underline{dr_1} \underline{dr_2} \quad (2)$$

avec $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}'$

Le caractère principal de cette approximation, comme le signalent MOISEWITSCH et SMITH (Mo-1) est qu'il n'y a pas de source d'erreurs évidente pouvant être suspectée a priori (à l'inverse de l'approximation de BORN-OPPENHEIMER) car le principe de bilan détaillé est respecté. Les sections efficaces totales obtenues à l'aide de l'approximation d'OCKKUR sont toujours plus faibles que celles correspondant à l'approximation de BORN-OPPENHEIMER ainsi qu'à l'approximation d'échange du premier ordre.

Ceci étant, on va donner dans ce qui suit les expressions analytiques que j'ai utilisées et qui sont du type de celles proposées par DRAWIN.

I.3.1. Transitions optiquement permises.

$$\sigma_{ij}(\epsilon) = -4\pi a_0^2 \left(\frac{\eta_1^H}{\epsilon_{ij}} \right)^2 f_{ij} g(\eta_{ij}) \quad (3)$$

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_i - \epsilon_j, \quad \eta_1^H = 13,59 \text{ eV}, \quad \eta_{ij} = -\epsilon / \epsilon_{ij}$$

$$g(\eta_{ij}) = \alpha_{ij} \frac{\eta_{ij} - 1}{\eta_{ij}^2} \log(1,25 \beta_{ij} \eta_{ij})$$

f_{ij} désigne l'intensité de la force d'oscillateur.

I.3.2. Transitions optiquement interdites.

I.3.2.1. *Sans changement de multiplicité :*

$$\sigma_{ij}(\epsilon) = 4\pi a_0^2 q_{ij} \frac{1 - \eta_{ij}^{-1}}{\eta_{ij}} \quad (4)$$

I.3.2.2. *Avec changement de multiplicité :*

$$\sigma_{ij}(\epsilon) = 4\pi a_0^2 q_{ij} \frac{\eta_{ij}^2 - 1}{\eta_{ij}^5} \quad (5)$$

Les coefficients α_{ij} , β_{ij} et q_{ij} sont des constantes pour une transition donnée. Les valeurs de ces coefficients sont proposées dans les tableaux 1 à 6. Parallèlement aux coefficients de DRAWIN, je donne les valeurs déduites des résultats d'OCHKUR. Les coefficients α_{ij} , β_{ij} et q_{ij} relatifs aux sections efficaces d'OCHKUR ont été calculés par ajustement à partir des tableaux numériques fournis par MOISEWITSCH. L'ordre de grandeur des maxima relatifs aux deux séries de valeurs est également fourni dans ces tableaux.

De manière empirique, j'ai effectué une généralisation du tableau initial de DRAWIN. En effet, en ce qui concerne la série de transitions $1^1S \rightarrow n^1P$, les valeurs de DRAWIN s'arrêtent à $1^1S \rightarrow 6^1P$. Or si l'on classe les maxima des sections efficaces par ordre de grandeur décroissant (tableaux 7 et 8) on constate que les sections efficaces des transitions de type n^1P , d'ordre supérieur à 6^1P seront plus importantes que les transitions existant dans le tableau de DRAWIN telles que 4^1D ou 5^3P , par exemple.

Pour déterminer les sections efficaces d'ordre supérieur à 6^1P , j'ai porté sur un même graphique, les valeurs des maximums en fonction de leur seuil d'excitation respectif. On obtient ainsi une courbe à décroissance monotone. En admettant un comportement uniforme quels que soient les seuils d'excitation, on peut extrapoler la partie connue. Alors, on détermine les maximums correspondant à des transitions supérieures à 6^1P . Comme à chaque série de transitions correspond une représentation analytique commune, les coefficients α_{ij} , β_{ij} , q_{ij} peuvent être obtenus en

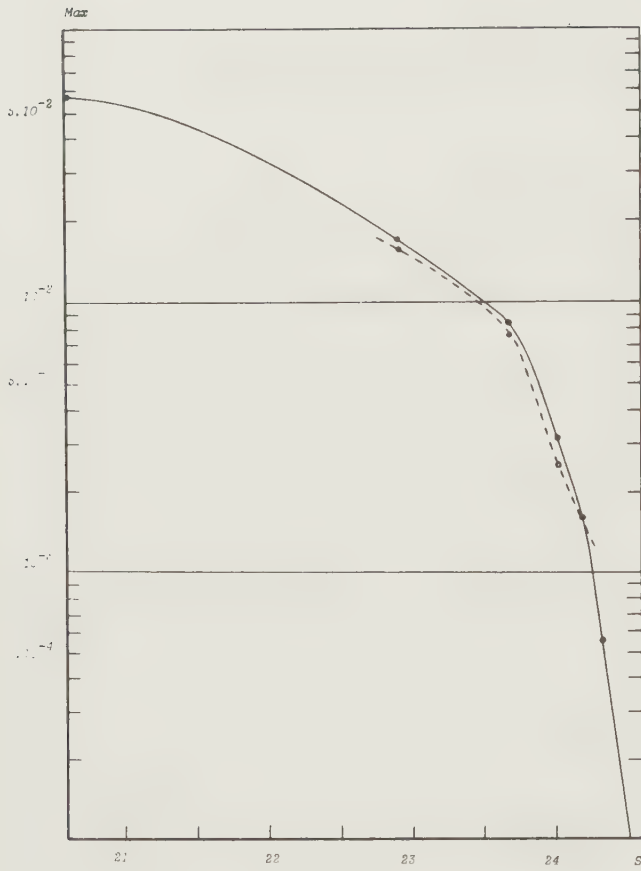


FIGURE 9

MAXIMUM DES SECTIONS EFFICACES $1^4S \rightarrow n^4S$
EN FONCTION DES SEUILS.

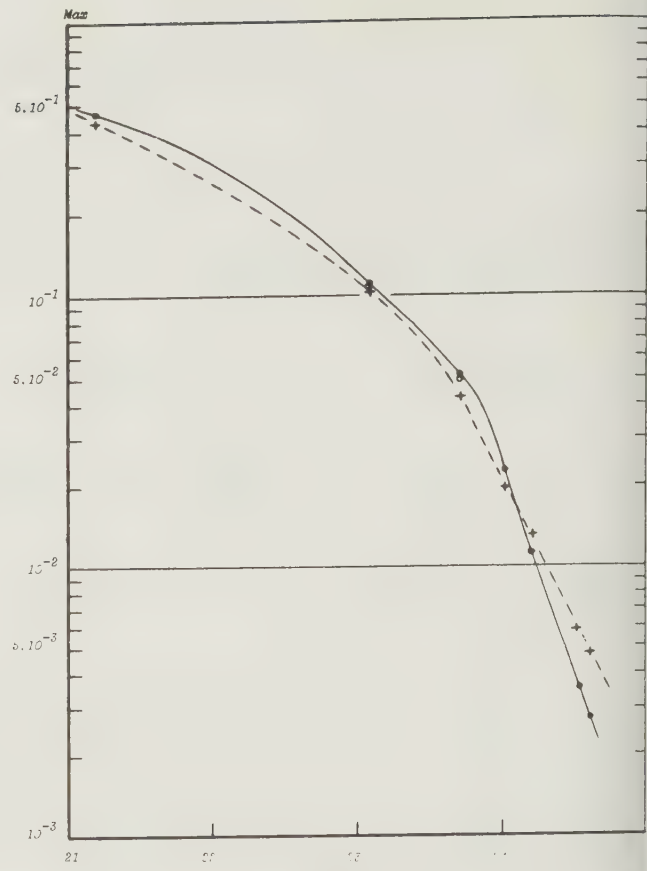


FIGURE 10

MAXIMUM DES SECTIONS EFFICACES $1^4S \rightarrow n^4P$
EN FONCTION DES SEUILS.

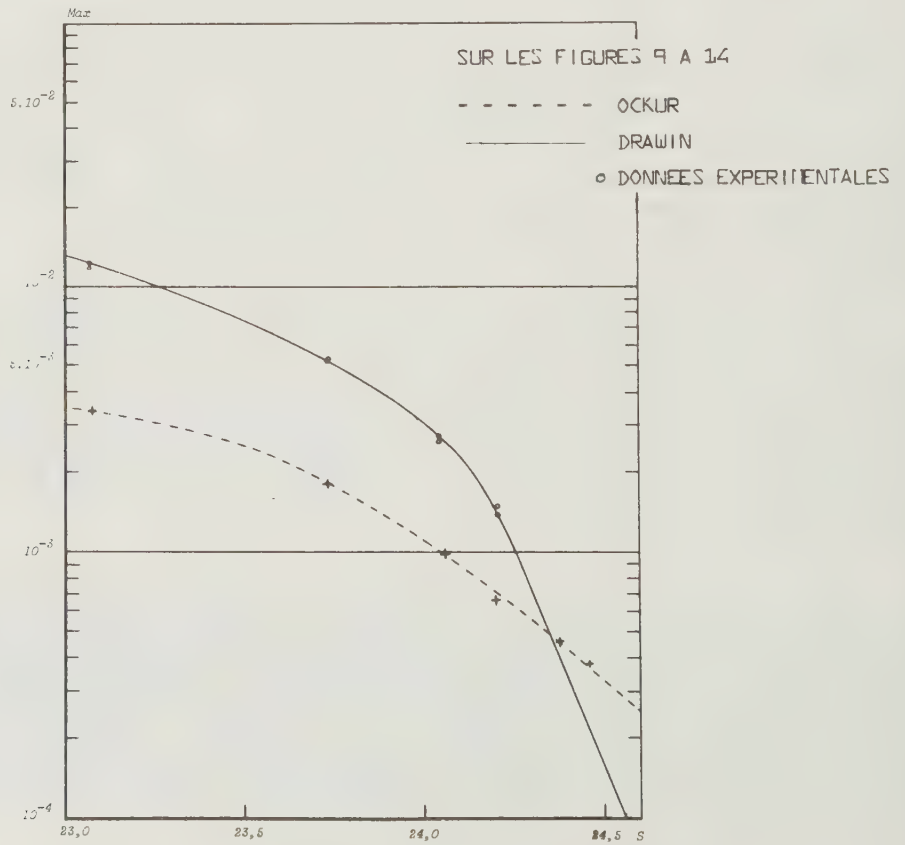


FIGURE 11

MAXIMUM DES SECTIONS EFFICACES $1^4S \rightarrow n^4L$
EN FONCTION DES SEUILS.

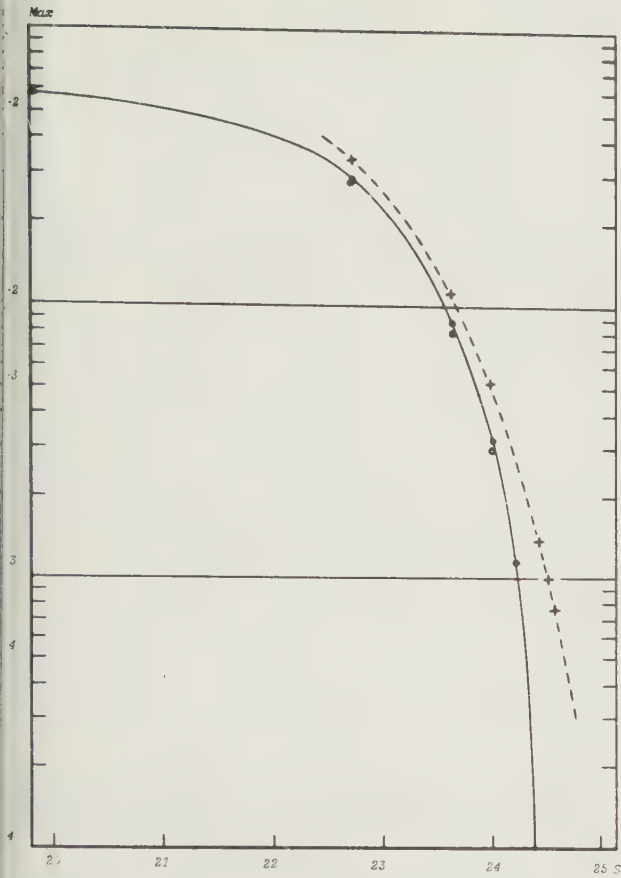


FIGURE 12

MAXIMUM DES SECTIONS EFFICACES $1^4S \rightarrow n^3S$
EN FONCTION DES SEUILS.

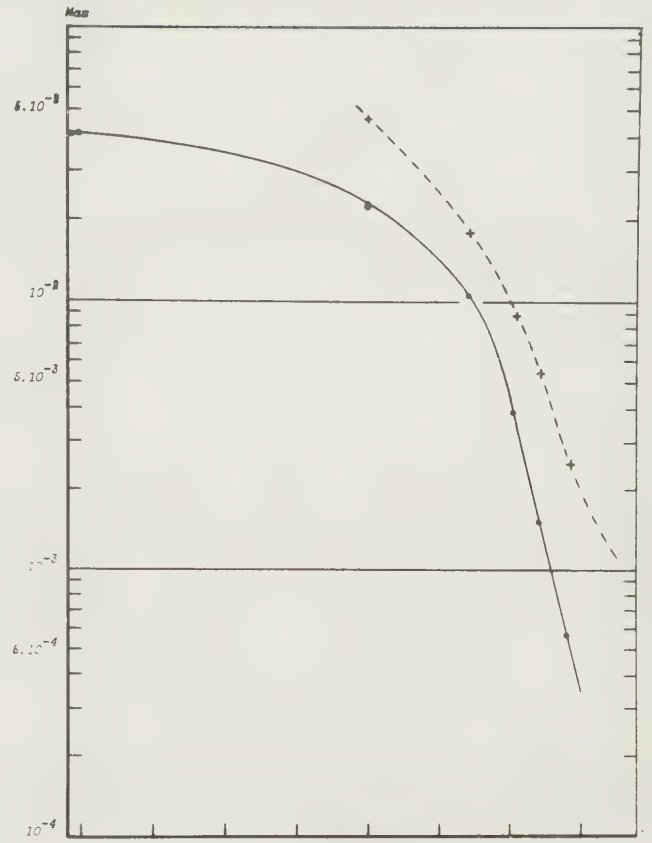


FIGURE 13

MAXIMUM DES SECTIONS EFFICACES $1^4S \rightarrow n^3P$
EN FONCTION DES SEUILS.

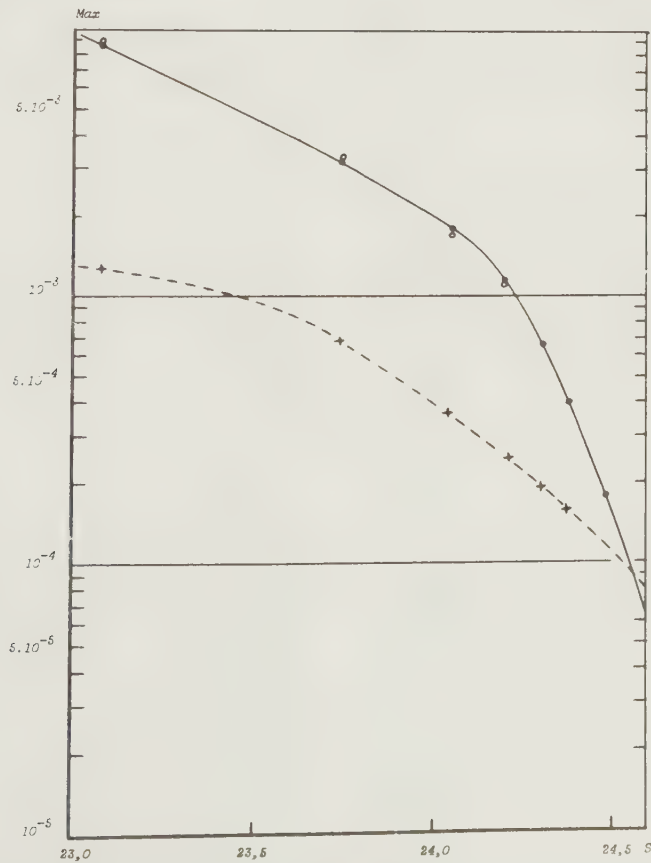


FIGURE 14

MAXIMUM DES SECTIONS EFFICACES $1^4S \rightarrow n^3L$
EN FONCTION DES SEUILS.

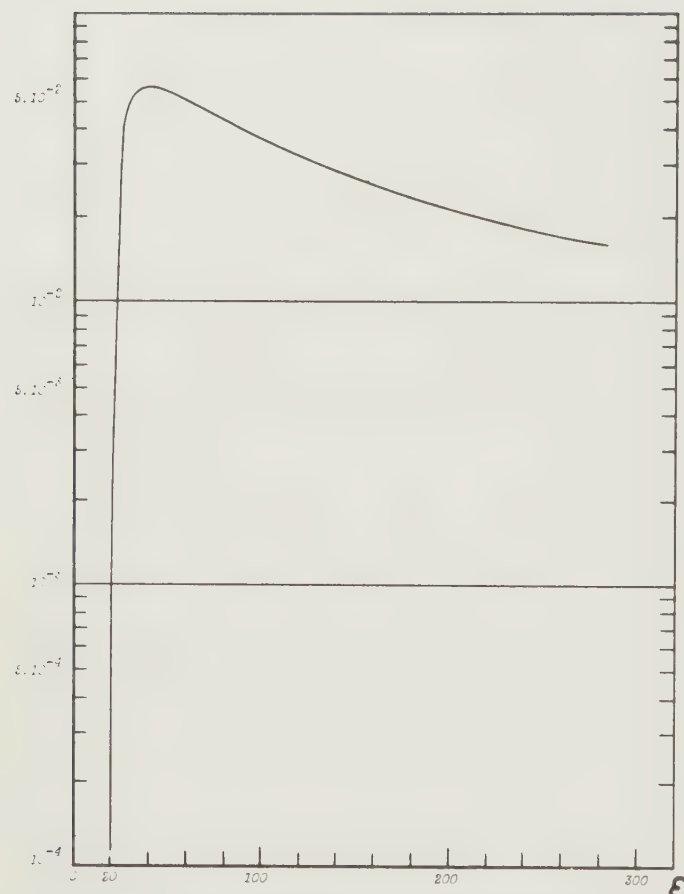


FIGURE 15

SECTION EFFICACE D'EXCITATION $1'S \rightarrow 2'S$.

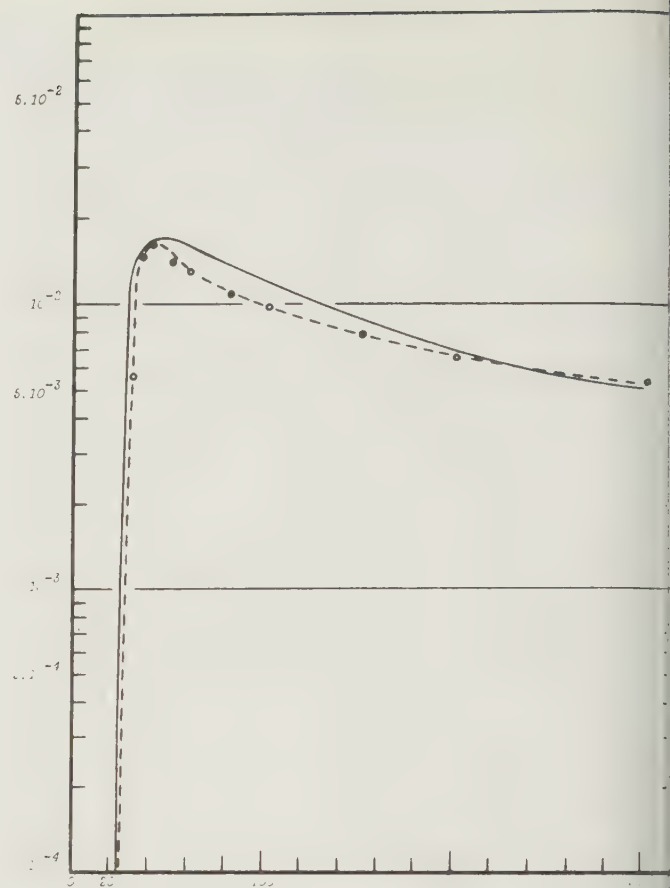


FIGURE 16

SECTION EFFICACE D'EXCITATION $1'S \rightarrow 3'S$.

SUR LES FIGURES 15 A 37 :

- - - - - OCKHUR
- DRAWIN
- - o - - - - - DONNEES EXPERIMENTALES

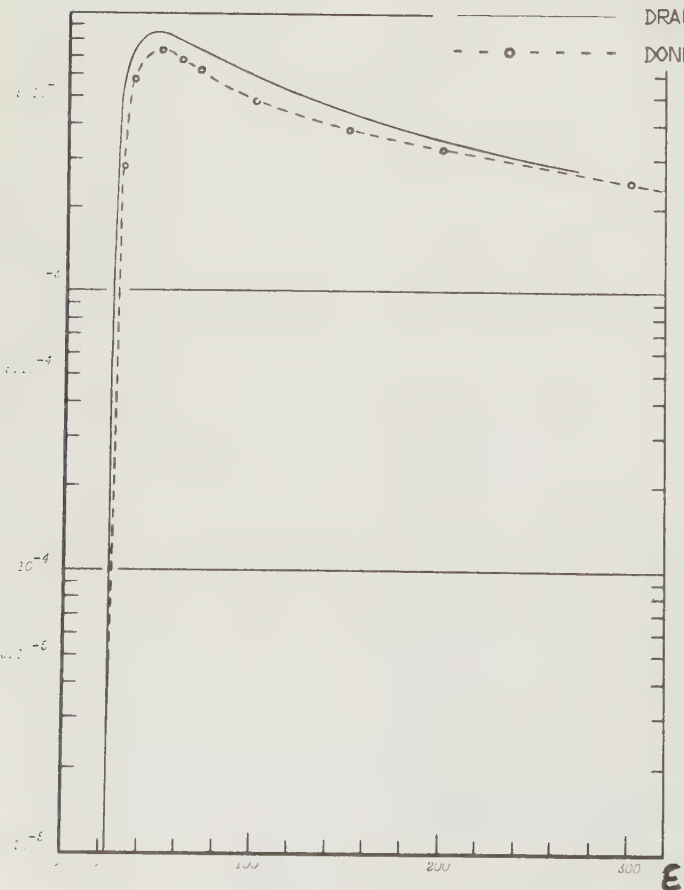


FIGURE 17

SECTION EFFICACE D'EXCITATION $1'S \rightarrow 4'S$.

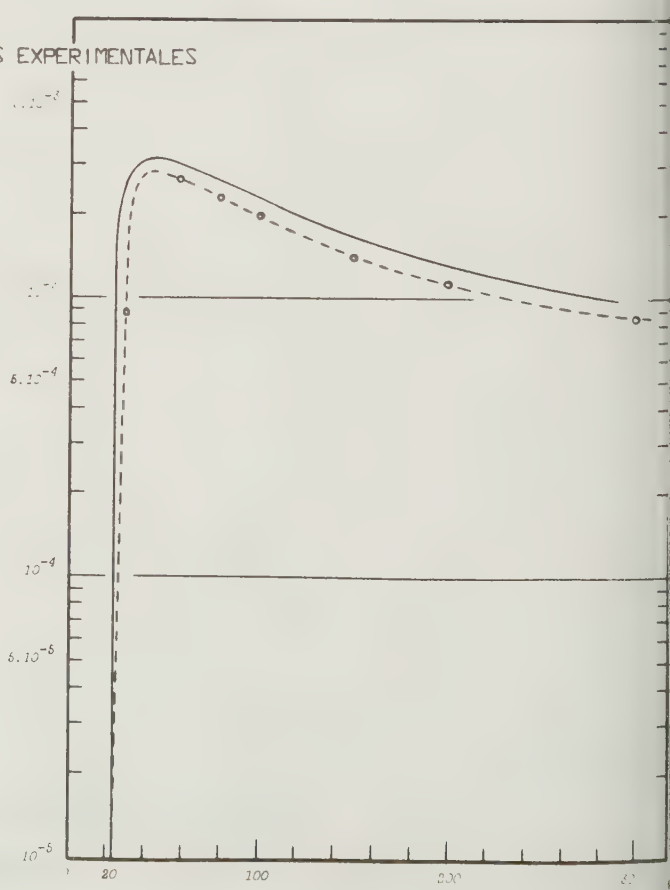


FIGURE 18

SECTION EFFICACE D'EXCITATION $1'S \rightarrow 5'S$.

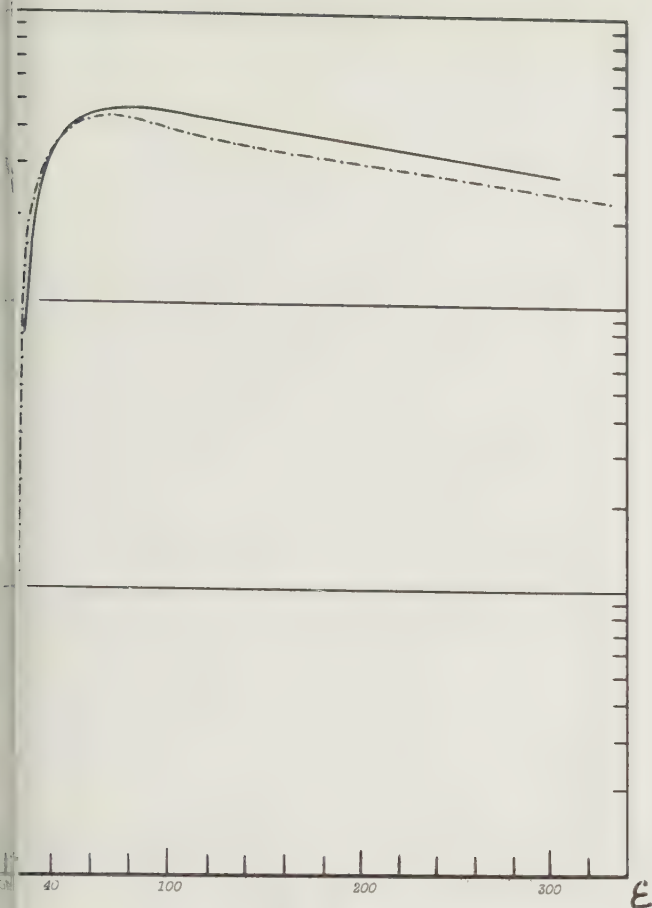


FIGURE 19

SECTION EFFICACE D'EXCITATION $1S \rightarrow 2P$.

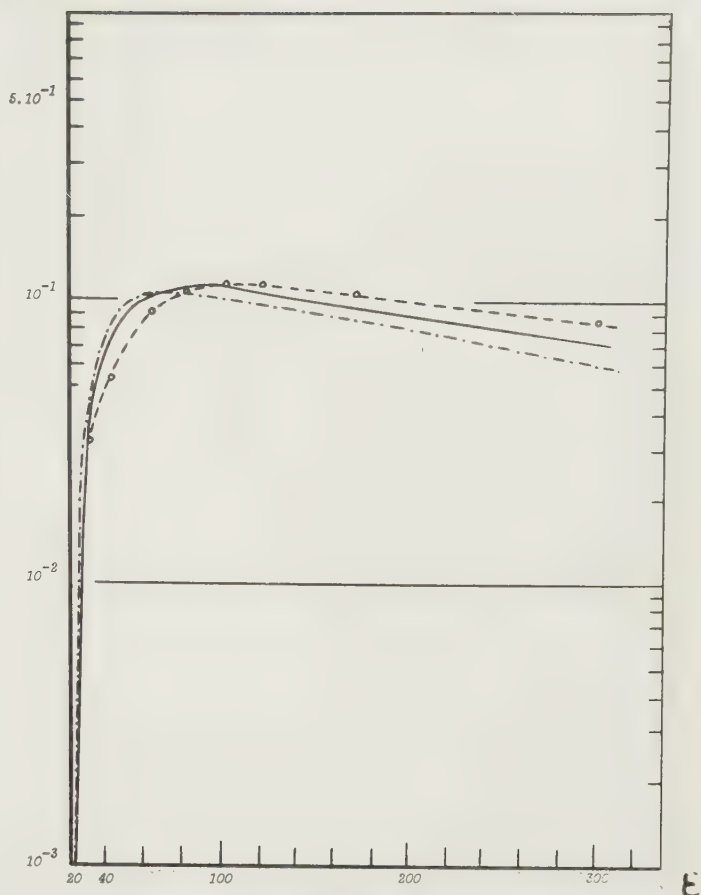


FIGURE 20

SECTION EFFICACE D'EXCITATION $1S \rightarrow 3P$.

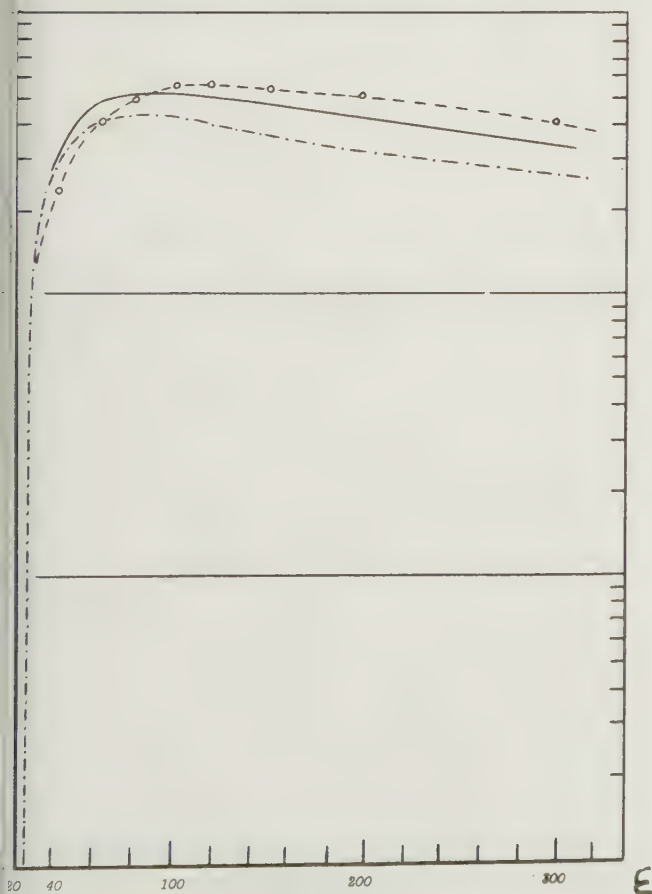


FIGURE 21

SECTION EFFICACE D'EXCITATION $1S \rightarrow 4P$.

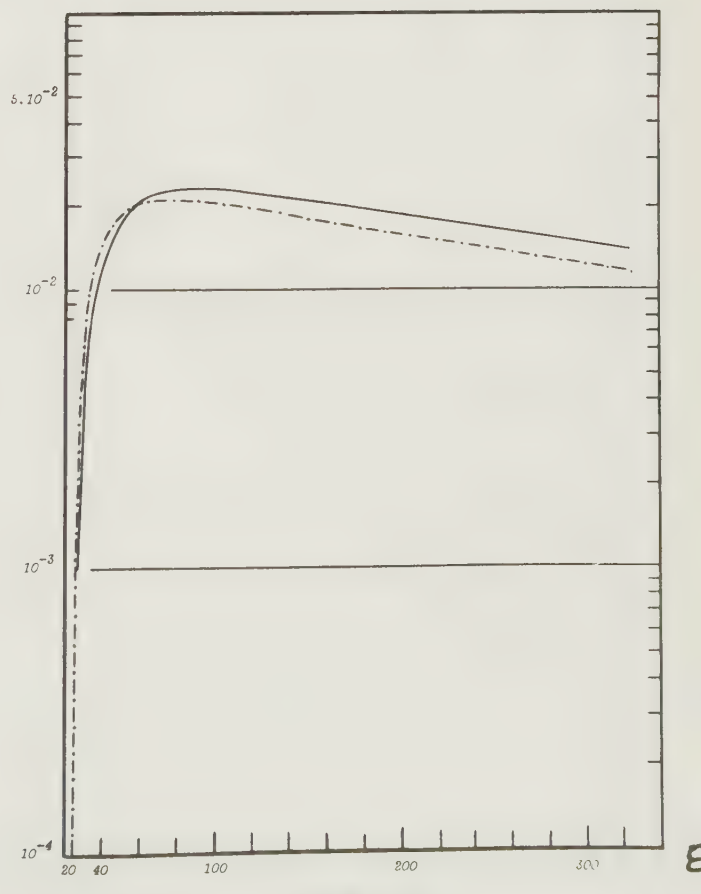


FIGURE 22

SECTION EFFICACE D'EXCITATION $1S \rightarrow 5P$.

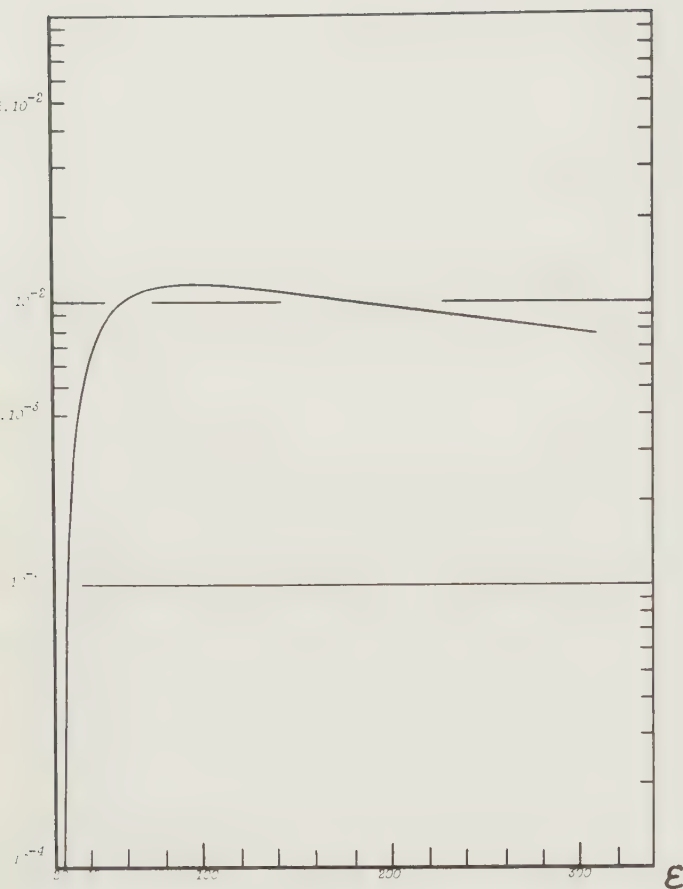


FIGURE 23

SECTION EFFICACE D'EXCITATION $1^1S \rightarrow 6^1P$.

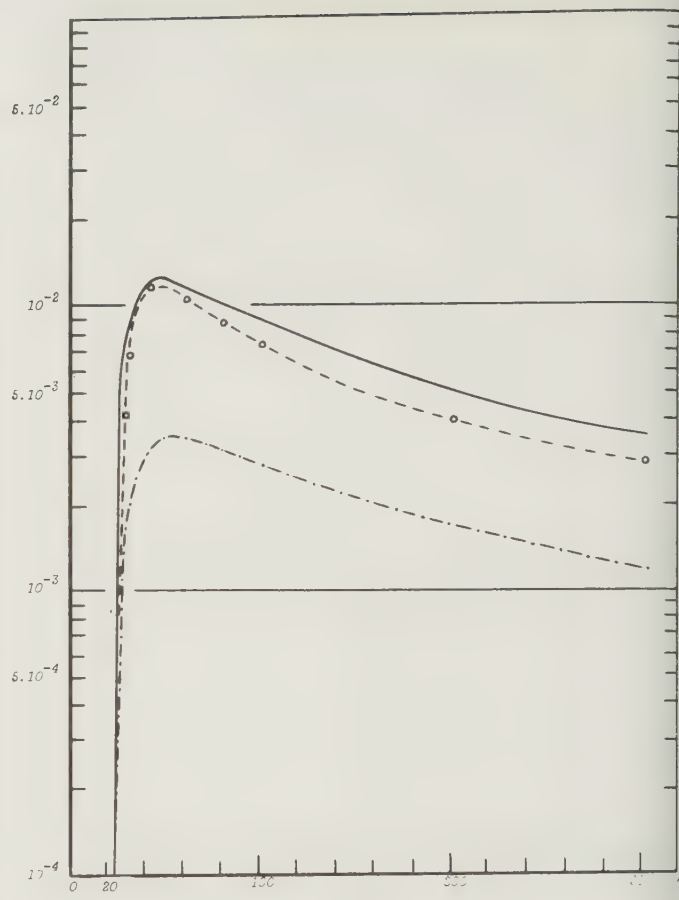


FIGURE 24

SECTION EFFICACE D'EXCITATION $1^1S \rightarrow 3^1D$.

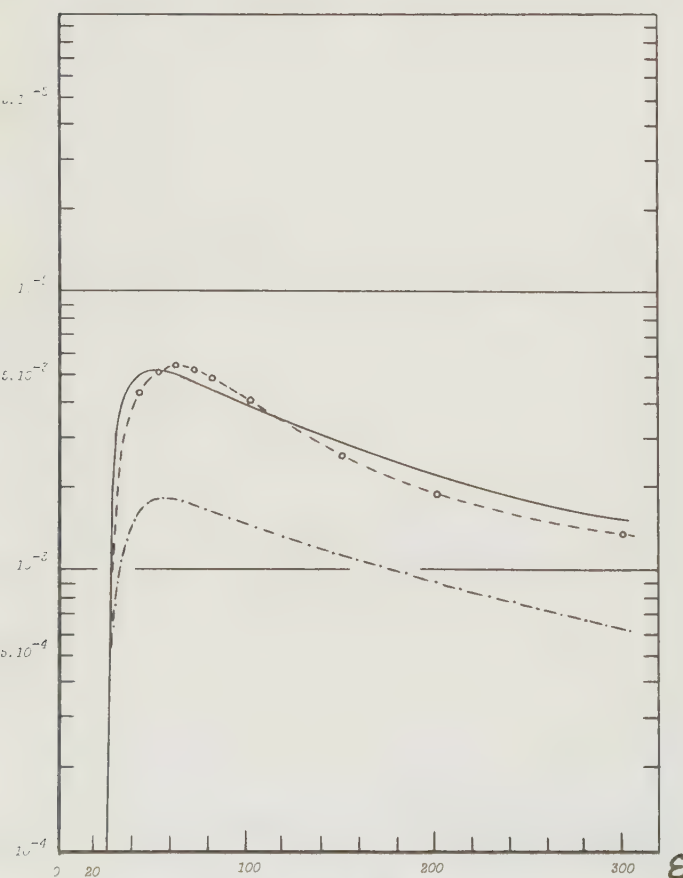


FIGURE 25

SECTION EFFICACE D'EXCITATION $1^1S \rightarrow 4^1D$.

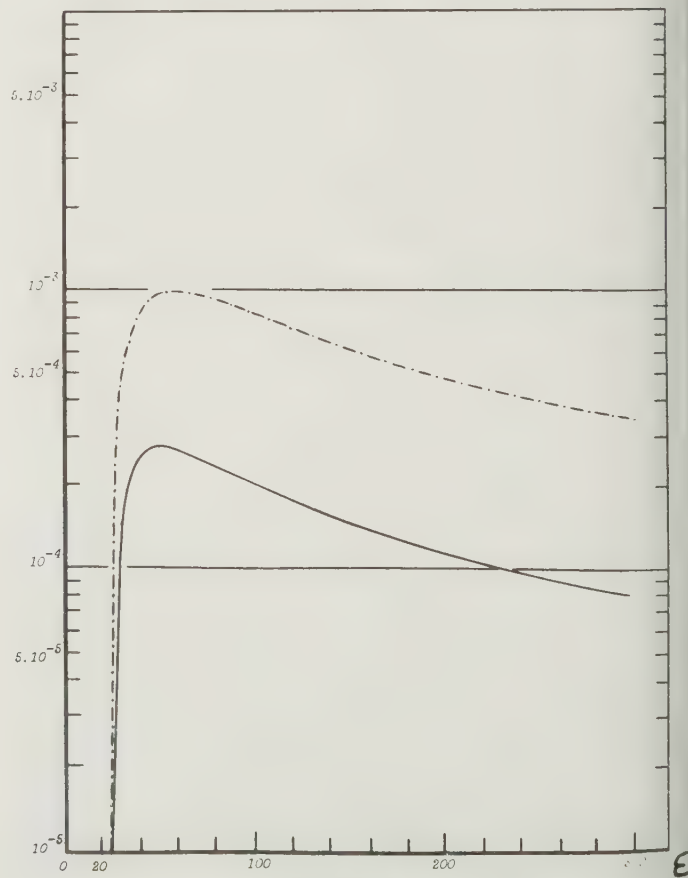


FIGURE 26

SECTION EFFICACE D'EXCITATION $1^1S \rightarrow 5^1D$.

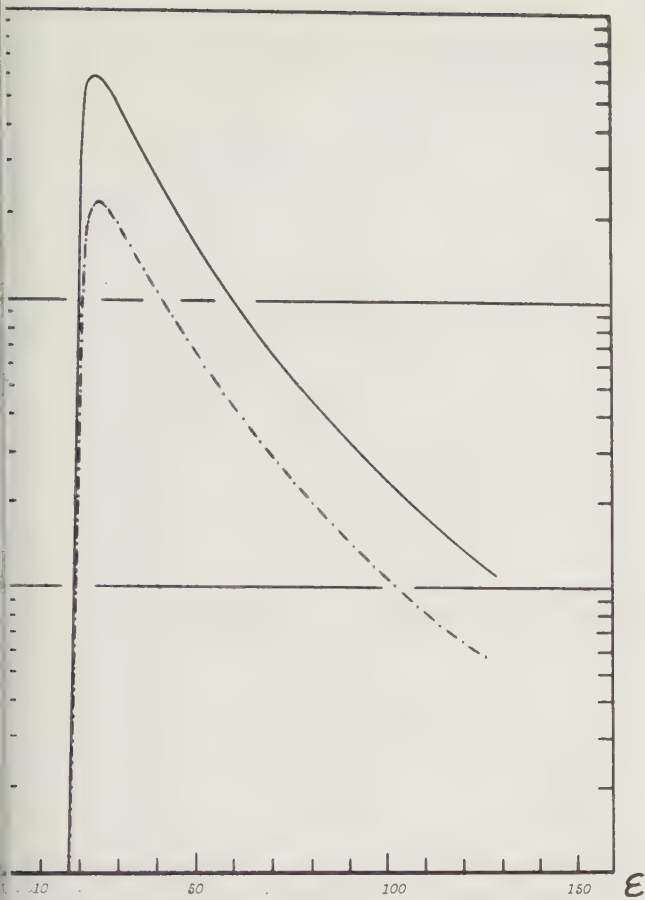


FIGURE 27

SECTION EFFICACE D'EXCITATION $1^1S \rightarrow 2^3S$.

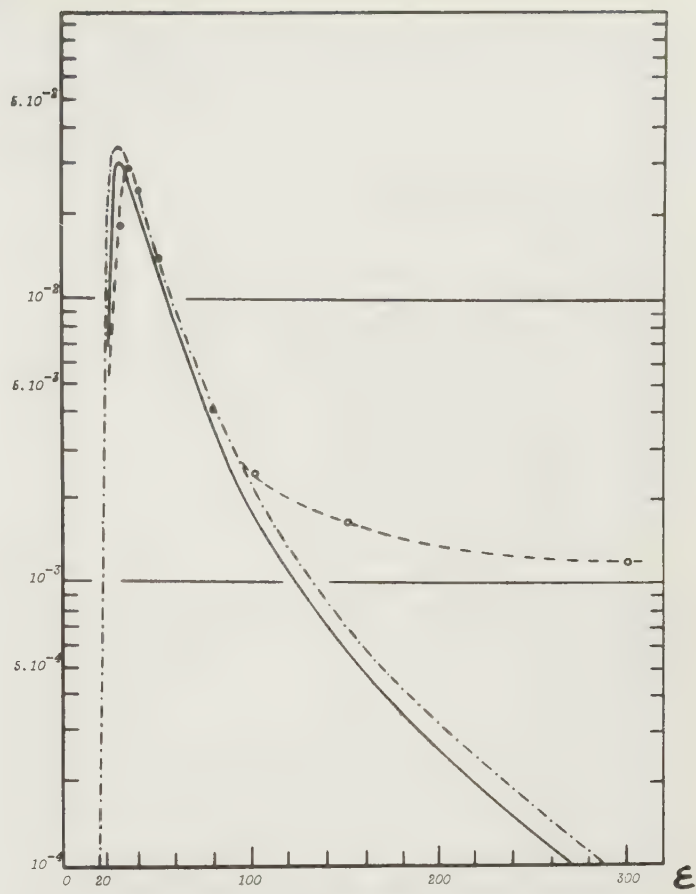


FIGURE 28

SECTION EFFICACE D'EXCITATION $1^1S \rightarrow 3^3S$.

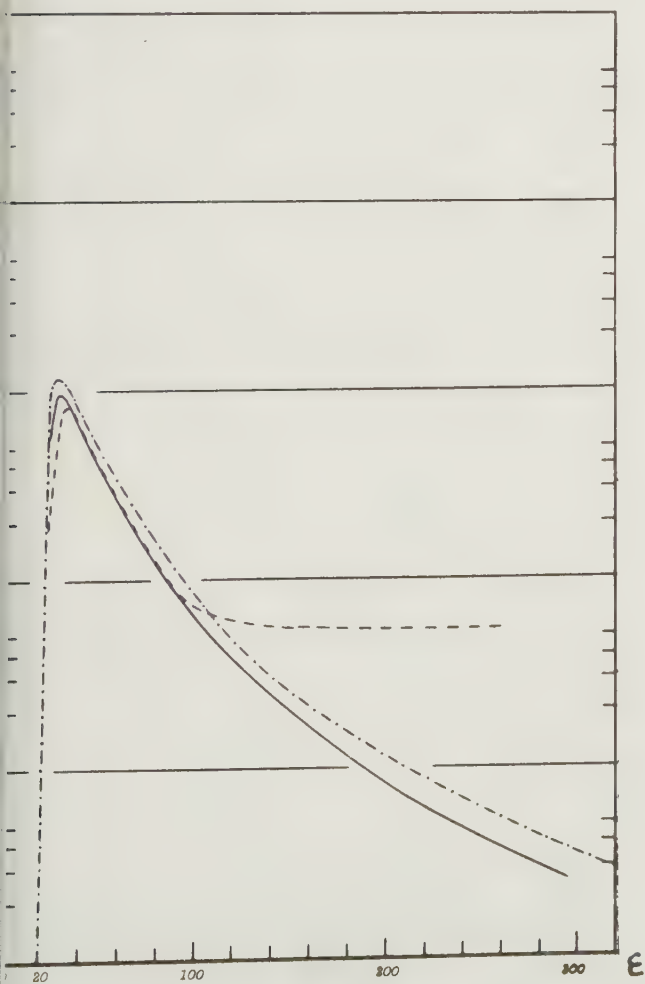


FIGURE 29

SECTION EFFICACE D'EXCITATION $1^1S \rightarrow 4^3S$.

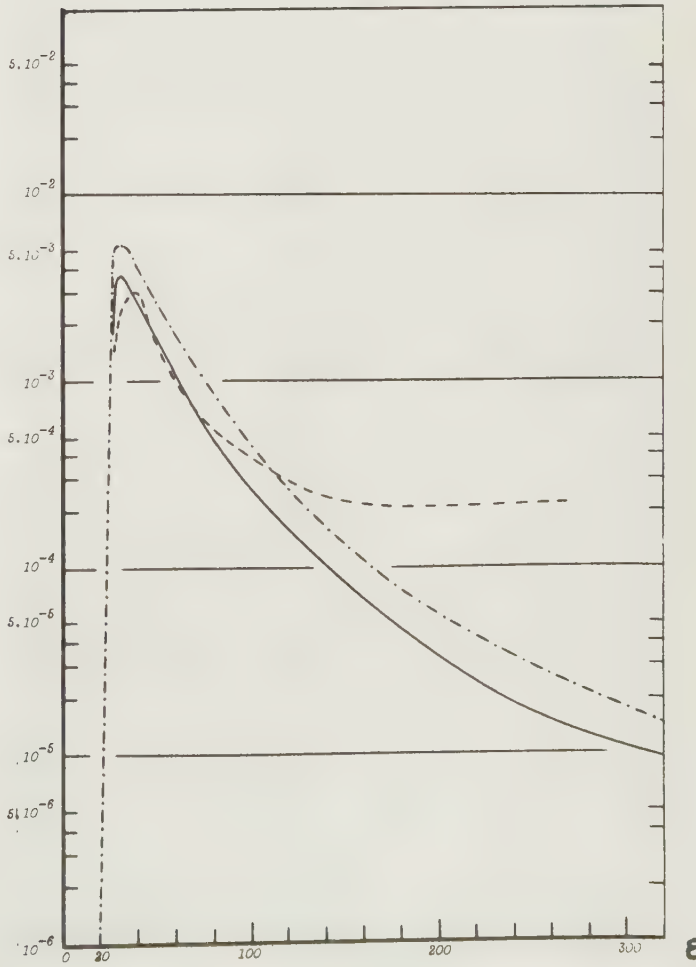


FIGURE 30

SECTION EFFICACE D'EXCITATION $1^1S \rightarrow 5^3S$.

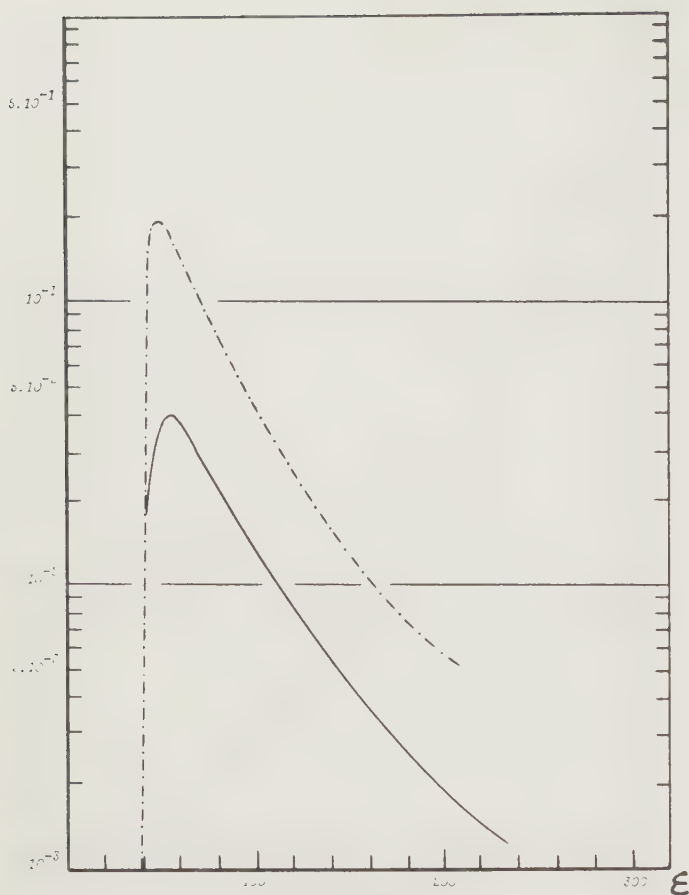


FIGURE 31

SECTION EFFICACE D'EXCITATION $1S \rightarrow 2^3P$.

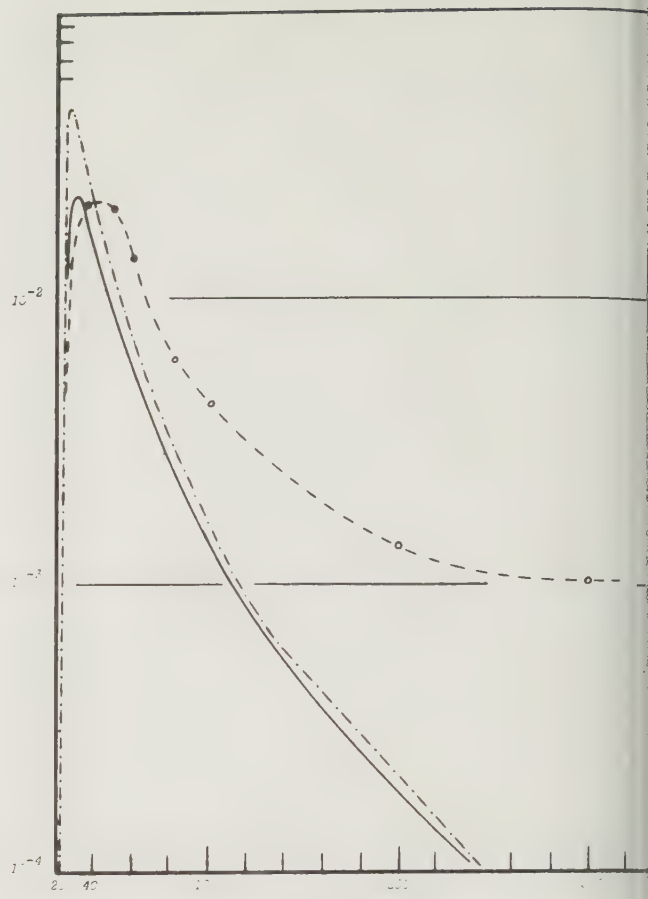


FIGURE 32

SECTION EFFICACE D'EXCITATION $1S \rightarrow 3^3P$.

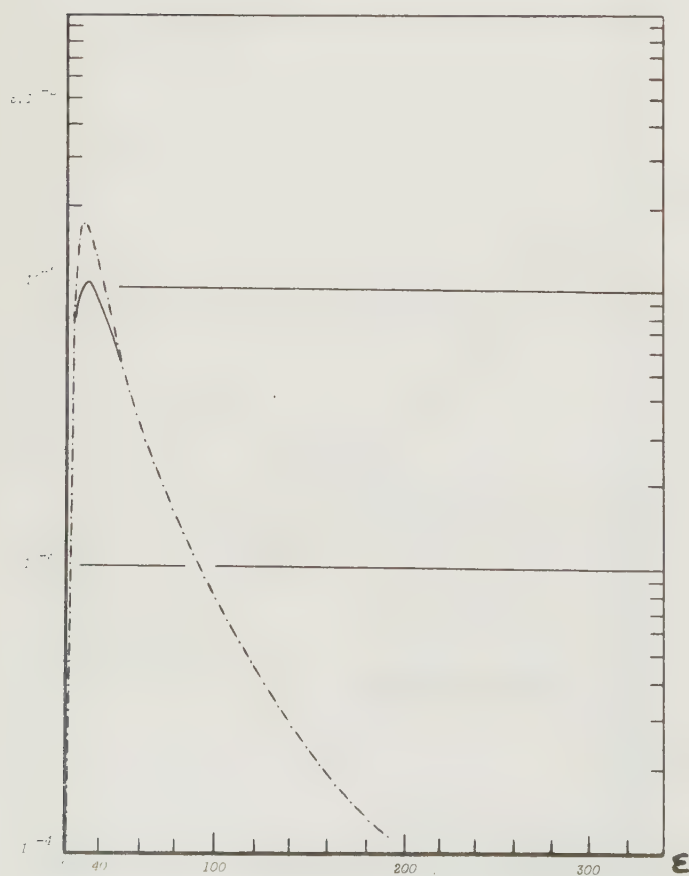


FIGURE 33

SECTION EFFICACE D'EXCITATION $1S \rightarrow 4^3P$.

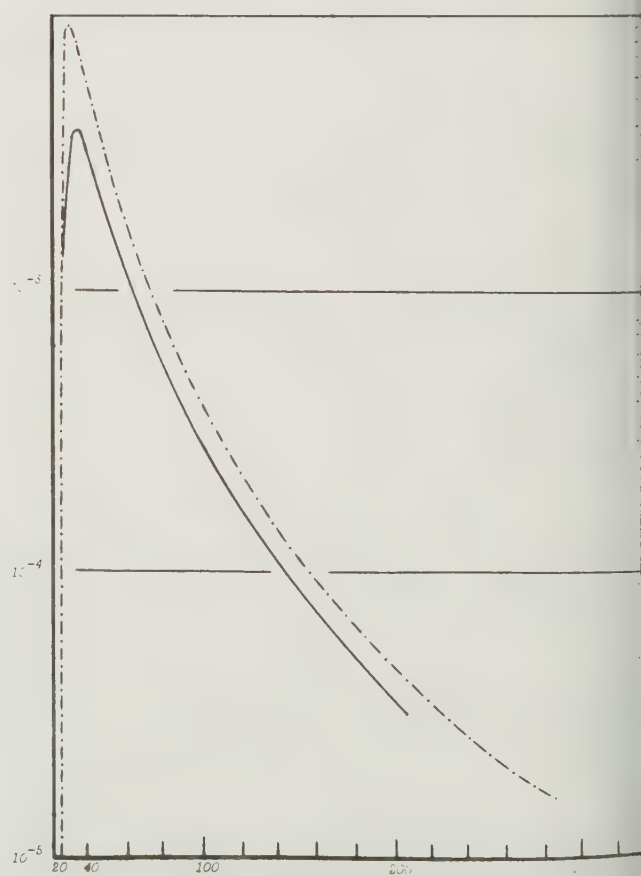


FIGURE 34

SECTION EFFICACE D'EXCITATION $1S \rightarrow 5^3P$.

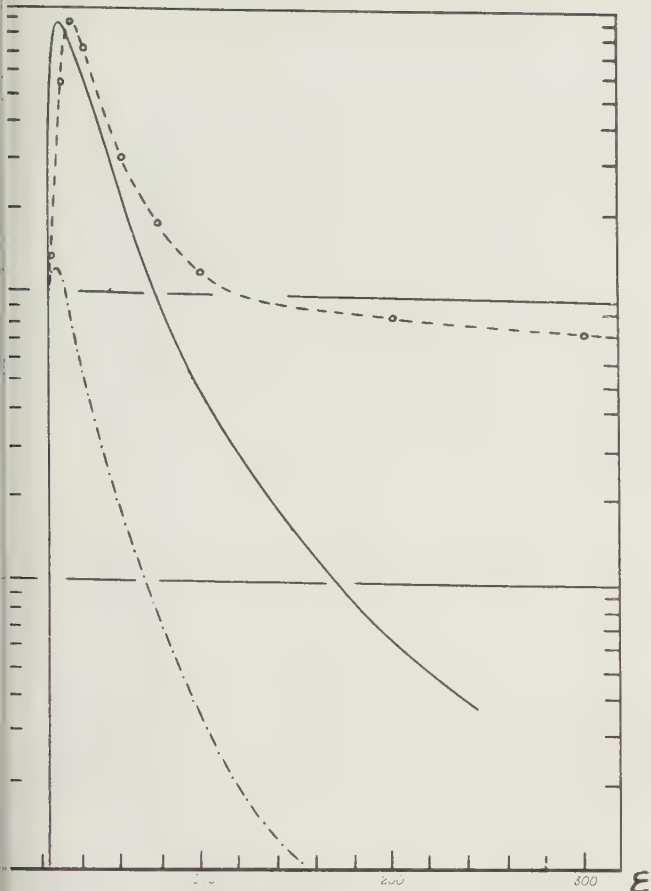


FIGURE 35

SECTION EFFICACE D'EXCITATION $1^1S \rightarrow 3^3D$.

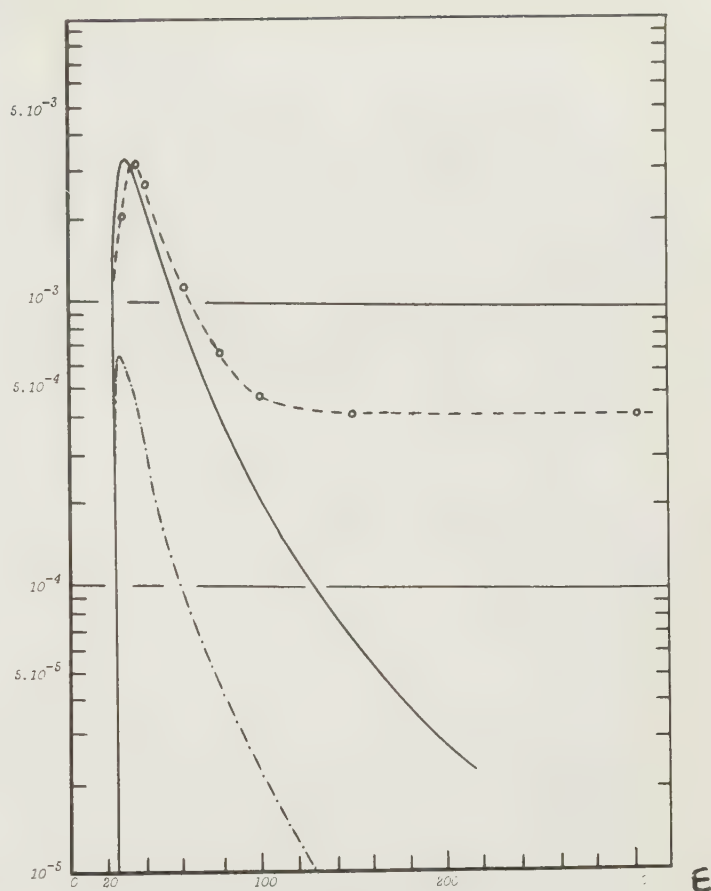


FIGURE 36

SECTION EFFICACE D'EXCITATION $1^1S \rightarrow 4^3D$.

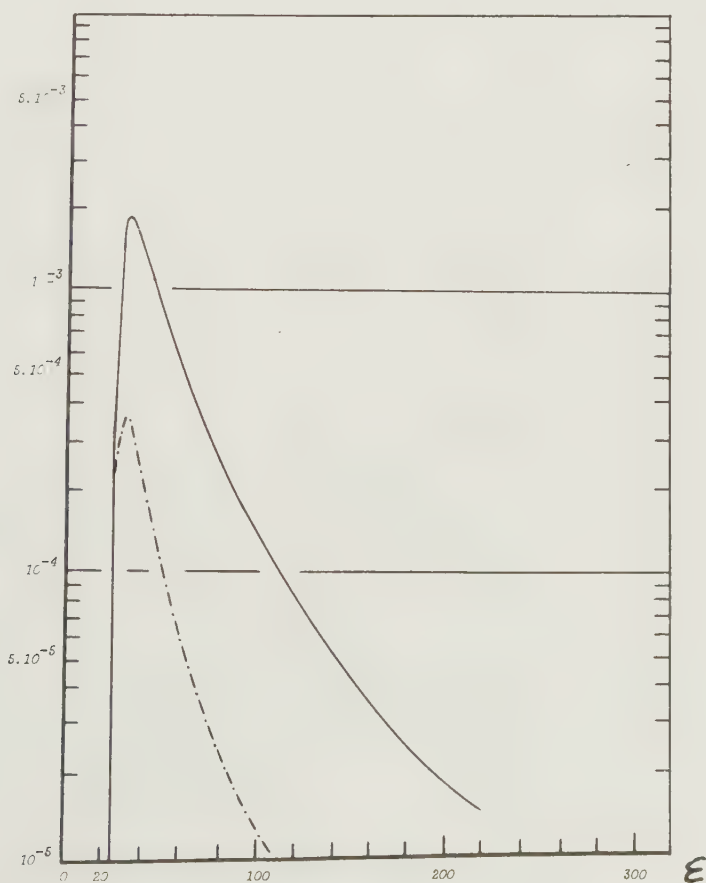


FIGURE 37

SECTION EFFICACE D'EXCITATION $1^1S \rightarrow 5^3D$.

utilisant les valeurs du maximum. Cette procédure a été adoptée pour prolonger chaque série pour les valeurs d'OCHKUR et de DRAWIN. Les valeurs extrapolées sont données également dans les tableaux 1 à 6. Les figures 9 à 14 représentent la variation des maxima en fonction des seuils d'excitation pour toutes les séries considérées. Sur chaque graphique, sont portées les valeurs d'OCHKUR,, de DRAWIN et chaque fois que cela était possible les valeurs expérimentales (St-4). L'ensemble des résultats est fourni par les figures 15 à 37. On peut constater que l'accord est excellent entre les valeurs d'OCHKUR et de DRAWIN pour les transitions du type $n^L S$ ou $n^1 P$. Par contre, il n'en est plus de même sans que la raison en soit claire pour les transitions du type $n^L D$ et $n^3 P$.

1.4. SECTIONS EFFICACES D'IONISATION.

I.4.1. Ionisation simple.

La situation est plus claire et l'ensemble des résultats coïncide relativement bien. La littérature offre de nombreuses études bibliographiques relatives aux sections efficaces d'ionisation. Citons en particulier, les articles de KIEFFER et DUNN (Ki-1) et de LOTZ (Lo-3). Les courbes pour l'hélium sont identiques dans chaque cas (figure 38).

I.4.2. Ionisation double.

On s'est contenté d'utiliser les valeurs proposées par LOTZ, correspondant aux mesures de DOLDER, HARRISON et THONEMANN (Do-1), (figure 39).

TABLEAU 1

$1^1S \rightarrow n^1S$	Seuils	DRAWIN Maximums $\equiv$ coefficients
2	20,6141	$0,568.10^{-1}$
3	22,9185	$0,171\ 934.10^{-1}$
4	23,6718	$0,85\ 1852.10^{-2}$
5	24,0094	$0,320\ 422.10^{-2}$
6	24,1893	$0,14\ 067\ .10^{-2}$
7	24,2964	$0,54\ 706\ .10^{-3}$
Extrapolation		
8	24,3654	$0,36.10^{-3}$
9	24,4122	$0,23.10^{-3}$
10	24,4456	$0,18.10^{-3}$
—	---	---
12	24,4887	$0,12.10^{-3}$
13	24,5043	$0,11.10^{-3}$

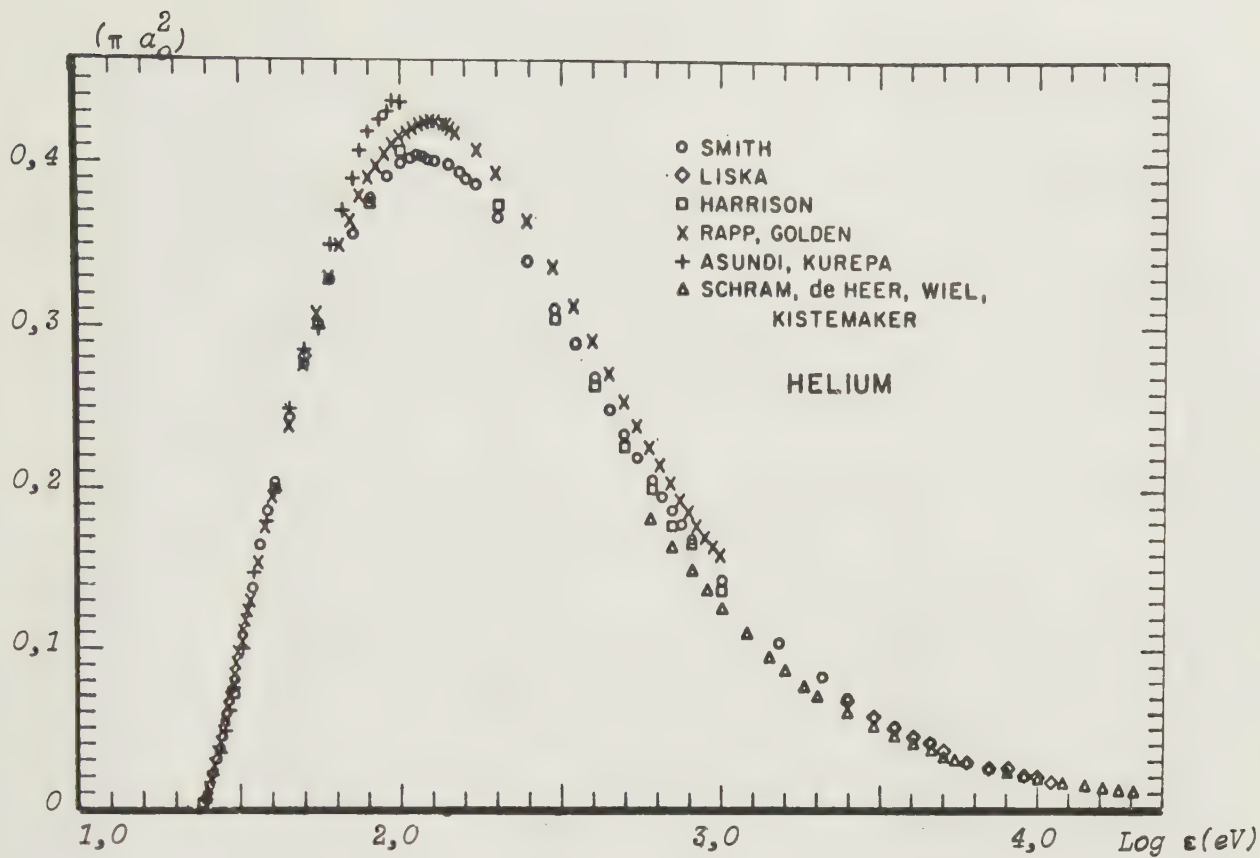


FIGURE 38

SECTIONS EFFICACES D'IONISATION SIMPLE.

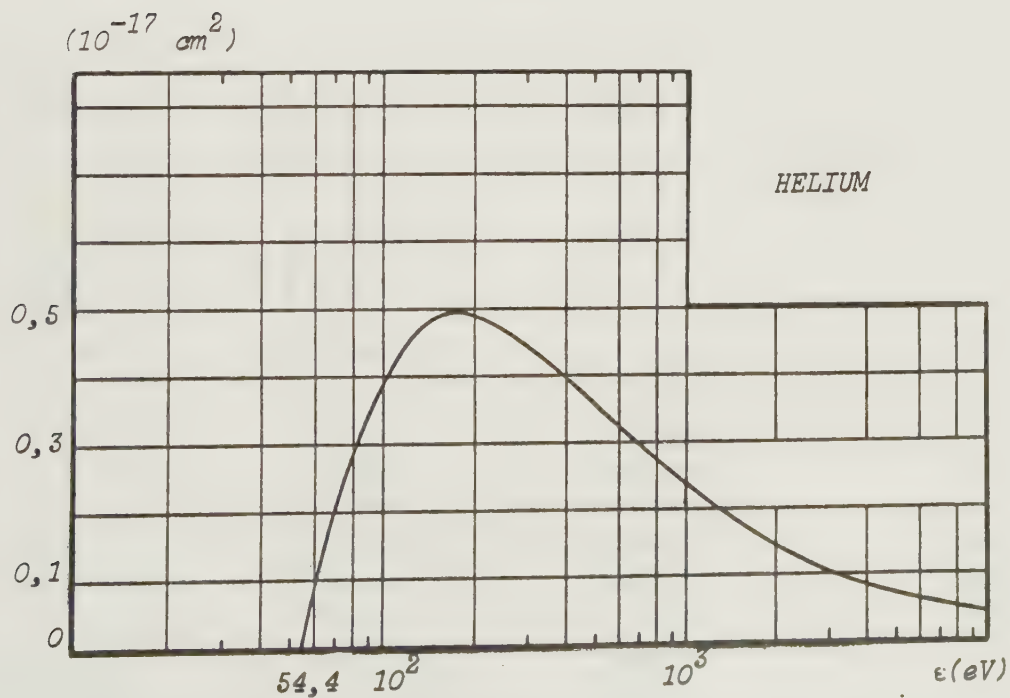


FIGURE 39

SECTION EFFICACE D'IONISATION DOUBLE.

TABLEAU 2

$1^1S \rightarrow n^1P$	Seuils (eV)	DRAWIN		OCHKUR	
		Maximums	Coefficients	Maximums	Coefficients
$1^1S \rightarrow 2^1P$	21,2163	0,47061	0,949	0,44506	0,90076
3	23,0852	0,114692	0,2738	0,10732509	0,273888
4	23,7402	$0,5199 \cdot 10^{-1}$	0,13129	$0,4374 \cdot 10^{-1}$	0,1138989
5	24,044	$0,23535 \cdot 10^{-1}$	0,06095	$0,21388 \cdot 10^{-1}$	0,0590
				----- Extrapolation -----	
6	24,2092	$0,11786 \cdot 10^{-1}$	0,03094	$0,133 \cdot 10^{-1}$	0,03492347
7	24,3089	$0,75 \cdot 10^{-2}$	$0,1985 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-2}$	0,026475
8	24,3736	$0,58 \cdot 10^{-2}$	$0,14437 \cdot 10^{-1}$	$0,82 \cdot 10^{-2}$	0,02334313
9	24,4180	$0,47 \cdot 10^{-2}$	$0,12555 \cdot 10^{-1}$	$0,72 \cdot 10^{-2}$	0,01923347
10	24,4498	$0,41 \cdot 10^{-2}$	$0,1098 \cdot 10^{-1}$	$0,66 \cdot 10^{-2}$	0,01767649
11	24,4734	$0,38 \cdot 10^{-2}$	$0,10197 \cdot 10^{-1}$	$0,62 \cdot 10^{-2}$	0,01685649
12	24,4913	$0,35 \cdot 10^{-2}$	$0,94058 \cdot 10^{-2}$	$0,58 \cdot 10^{-2}$	0,01558676
13	24,5052	$0,32 \cdot 10^{-2}$	$0,8609 \cdot 10^{-2}$	$0,56 \cdot 10^{-2}$	0,01506639
14	24,5163	$0,31 \cdot 10^{-2}$	$0,8347 \cdot 10^{-2}$	$0,54 \cdot 10^{-2}$	0,01747321
15	24,5252	$0,31 \cdot 10^{-2}$	0,0083	$0,53 \cdot 10^{-2}$	0,01428257
16	24,5325	$0,3 \cdot 10^{-2}$	0,008	$0,51 \cdot 10^{-2}$	0,01375177
17	24,5385	$0,29 \cdot 10^{-2}$	0,0077	$0,505 \cdot 10^{-2}$	0,0136236
18	24,5436	$0,28 \cdot 10^{-2}$	0,0075	$0,59 \cdot 10^{-2}$	0,01349434
19	24,5479	$0,28 \cdot 10^{-2}$	$0,7559 \cdot 10^{-2}$	$0,49 \cdot 10^{-2}$	0,01322908
20	24,5516	$0,27 \cdot 10^{-2}$	$0,729 \cdot 10^{-2}$	$0,48 \cdot 10^{-2}$	0,012963

TABLEAU 3

$1^1S \rightarrow n^1D$	Seuils (eV)	DRAWIN Max (cm^{-1}) $\equiv$ coeff.	OCHKUR Max (cm^{-1}) $\equiv$ coeff.
3	23,723	$0,12504 \cdot 10^{-1}$	$0,346767 \cdot 10^{-2}$
4	23,7345	$0,531444 \cdot 10^{-2}$	$0,18266 \cdot 10^{-2}$
5	24,041	$0,281345 \cdot 10^{-2}$	$0,100941 \cdot 10^{-2}$
6	24,2074	$0,14067 \cdot 10^{-2}$	Extrapolation $0,68 \cdot 10^{-3}$
		----- Extrapolation -----	
7	24,3077	$0,66 \cdot 10^{-3}$	$0,54 \cdot 10^{-3}$
8	24,3729	$0,41 \cdot 10^{-3}$	$0,46 \cdot 10^{-3}$
9	24,4175	$0,295 \cdot 10^{-3}$	$0,41 \cdot 10^{-3}$
10	24,4494	$0,23 \cdot 10^{-3}$	$0,38 \cdot 10^{-3}$
11	24,4730	$0,195 \cdot 10^{-3}$	$0,35 \cdot 10^{-3}$
12	24,4910	$0,17 \cdot 10^{-3}$	$0,33 \cdot 10^{-3}$
13	24,5050	$0,153 \cdot 10^{-3}$	$0,32 \cdot 10^{-3}$
14	24,5161	$0,14 \cdot 10^{-3}$	$0,31 \cdot 10^{-3}$

TABLEAU 4

$1^1S \rightarrow n^3S$	Seuils	DRAWIN		OCHKUR	
		Maximums	Coefficients	Maximums	Coefficients
2	19,818	$0,586 \cdot 10^{-1}$	0,3157	0,2128	1,34734
3	22,7167	$0,3097 \cdot 10^{-1}$	0,1532	$0,34777 \cdot 10^{-1}$	$2,040396 \cdot 10^{-1}$
4	23,5922	$0,953 \cdot 10^{-2}$	0,0512	$0,11566 \cdot 10^{-1}$	$0,71806 \cdot 10^{-1}$
5	23,9701	$0,3603 \cdot 10^{-2}$	0,01938	$0,537571 \cdot 10^{-2}$	$0,31851277 \cdot 10^{-1}$
-----Extrapolation-----					
6	24,1672	$0,11618 \cdot 10^{-2}$	0,00625	$0,31 \cdot 10^{-2}$	$0,16675 \cdot 10^{-1}$
-----Extrapolation-----					
7	24,2827	$0,35 \cdot 10^{-3}$	$0,18827 \cdot 10^{-2}$	$0,21 \cdot 10^{-2}$	$0,11296 \cdot 10^{-1}$
8	24,3563	$0,17 \cdot 10^{-3}$	$0,9144 \cdot 10^{-3}$	$0,165 \cdot 10^{-2}$	$0,88755 \cdot 10^{-2}$
9	24,4059	$0,11 \cdot 10^{-3}$	$0,5917 \cdot 10^{-3}$	$0,13 \cdot 10^{-2}$	$0,699288 \cdot 10^{-2}$
10	24,4412	$0,74 \cdot 10^{-4}$	$0,398 \cdot 10^{-3}$	$0,11 \cdot 10^{-2}$	$0,591705 \cdot 10^{-2}$
11	24,4668	$0,56 \cdot 10^{-4}$	$0,30123 \cdot 10^{-3}$	$0,1 \cdot 10^{-2}$	$0,53791 \cdot 10^{-2}$
12	24,4862	$0,45 \cdot 10^{-4}$	$0,24206 \cdot 10^{-3}$	$0,92 \cdot 10^{-3}$	$0,49488 \cdot 10^{-2}$
13	24,5012	$0,4 \cdot 10^{-4}$	$0,21516 \cdot 10^{-3}$	$0,84 \cdot 10^{-3}$	$0,451848 \cdot 10^{-2}$
14	24,5131	$0,36 \cdot 10^{-4}$	$0,193649 \cdot 10^{-3}$	$0,83 \cdot 10^{-3}$	$0,446468 \cdot 10^{-2}$
15	24,5250	$0,31 \cdot 10^{-4}$	$0,166753 \cdot 10^{-3}$	$0,78 \cdot 10^{-3}$	$0,41957 \cdot 10^{-2}$

TABLEAU 5

$1^1S \rightarrow n^3P$	Seuils	DRAWIN		OCHKUR	
		Maximums	Coefficients	Maximums	Coefficients
2	20,9624	$0,41489 \cdot 10^{-1}$	0,20508	0,19779	0,824033
3	23,0053	$0,23876 \cdot 10^{-1}$	0,118	$0,47357 \cdot 10^{-1}$	0,197449
4	23,7061	$0,10922 \cdot 10^{-1}$	0,058	$0,184466 \cdot 10^{-1}$	0,0831389
5	24,0264	$0,3951 \cdot 10^{-2}$	0,02125	$0,9248537 \cdot 10^{-2}$	0,036159077
-----Extrapolation-----					
6	24,1990	$0,155 \cdot 10^{-2}$	$0,8337 \cdot 10^{-2}$	$0,57 \cdot 10^{-2}$	$0,3066111 \cdot 10^{-1}$
7	24,3025	$0,96 \cdot 10^{-3}$	$0,51639 \cdot 10^{-2}$	$0,39 \cdot 10^{-2}$	$0,20978 \cdot 10^{-1}$
8	24,3693	$0,7 \cdot 10^{-3}$	$0,3767 \cdot 10^{-2}$	$0,33 \cdot 10^{-2}$	$0,1775 \cdot 10^{-1}$
9	24,4150	$0,58 \cdot 10^{-3}$	$0,31199 \cdot 10^{-2}$	$0,26 \cdot 10^{-2}$	$0,13985 \cdot 10^{-1}$
10	24,4476	$0,49 \cdot 10^{-3}$	$0,2635 \cdot 10^{-2}$	$0,25 \cdot 10^{-2}$	$0,134478 \cdot 10^{-1}$
11	24,4717	$0,43 \cdot 10^{-3}$	$0,2313 \cdot 10^{-2}$	$0,23 \cdot 10^{-2}$	$0,12372 \cdot 10^{-1}$
12	24,49	$0,39 \cdot 10^{-3}$	$0,2097 \cdot 10^{-2}$	$0,22 \cdot 10^{-2}$	$0,11834 \cdot 10^{-1}$
13	24,5042	$0,37 \cdot 10^{-3}$	$0,199 \cdot 10^{-2}$	$0,203 \cdot 10^{-2}$	$0,10919 \cdot 10^{-1}$
14	24,5155	$0,36 \cdot 10^{-3}$	$0,1936 \cdot 10^{-2}$	$0,2 \cdot 10^{-2}$	$0,10758 \cdot 10^{-1}$
15	24,5246	$0,34 \cdot 10^{-3}$	$0,18289 \cdot 10^{-2}$	$0,19 \cdot 10^{-2}$	$0,1022037 \cdot 10^{-1}$
16	24,5320	$0,33 \cdot 10^{-3}$	$0,1775 \cdot 10^{-2}$	$0,185 \cdot 10^{-2}$	$0,99514 \cdot 10^{-2}$
17	24,5381	$0,32 \cdot 10^{-3}$	$0,1721 \cdot 10^{-2}$	$0,18 \cdot 10^{-2}$	$0,96824 \cdot 10^{-2}$
18	24,5433	$0,31 \cdot 10^{-3}$	$0,1667 \cdot 10^{-2}$	$0,178 \cdot 10^{-2}$	$0,957487 \cdot 10^{-2}$
19	24,5476	$0,3 \cdot 10^{-3}$	$0,16137 \cdot 10^{-2}$	$0,175 \cdot 10^{-2}$	$0,94135 \cdot 10^{-2}$
20	24,5513	$0,3 \cdot 10^{-3}$	$0,16137 \cdot 10^{-2}$	$0,17 \cdot 10^{-2}$	$0,91445 \cdot 10^{-2}$
21	24,5545	$0,3 \cdot 10^{-3}$	$0,16137 \cdot 10^{-2}$	$0,17 \cdot 10^{-2}$	$0,91445 \cdot 10^{-2}$
22	24,5573	$0,3 \cdot 10^{-3}$	$0,16137 \cdot 10^{-2}$	$0,17 \cdot 10^{-2}$	$0,91445 \cdot 10^{-2}$

TABLEAU 6

$1^1S \rightarrow n^3D$	Seuils	DRAWIN		OCHKUR	
		Maximums	Coefficients	Maximums	Coefficients
3	23,0719	$0,8831 \cdot 10^{-2}$	0,04751	$0,12905 \cdot 10^{-2}$	$4,96638 \cdot 10^{-3}$
4	23,7343	$0,3253 \cdot 10^{-2}$	0,01750	$0,69687026 \cdot 10^{-3}$	$0,27794 \cdot 10^{-2}$
5	24,0408	$0,19176 \cdot 10^{-2}$	0,01031	$0,385448 \cdot 10^{-3}$	$0,44065129 \cdot 10^{-3}$
-----Extrapolation-----					
6	24,2073	$0,1162 \cdot 10^{-2}$	0,00625	$0,255 \cdot 10^{-3}$	$0,137168 \cdot 10^{-2}$
7	24,3077	$0,69737 \cdot 10^{-3}$	0,00375	$0,195 \cdot 10^{-3}$	$0,104893 \cdot 10^{-2}$
-----Extrapolation-----					
8	24,3728	$0,41 \cdot 10^{-3}$	$0,2205 \cdot 10^{-2}$	$0,16 \cdot 10^{-3}$	$0,860663 \cdot 10^{-3}$
9	24,4175	$0,29 \cdot 10^{-3}$	$0,15599 \cdot 10^{-2}$	$0,14 \cdot 10^{-3}$	$0,75308 \cdot 10^{-3}$
10	24,4494	$0,23 \cdot 10^{-3}$	$0,1237 \cdot 10^{-2}$	$0,128 \cdot 10^{-3}$	$0,68853 \cdot 10^{-3}$
11	24,4731	$0,19 \cdot 10^{-3}$	$0,15599 \cdot 10^{-2}$	$0,118 \cdot 10^{-3}$	$0,634738 \cdot 10^{-3}$
12	24,4910	$0,165 \cdot 10^{-3}$	$0,887558 \cdot 10^{-2}$	$0,11 \cdot 10^{-3}$	$0,5917 \cdot 10^{-3}$
13	24,5050	$0,15 \cdot 10^{-3}$	$0,80687 \cdot 10^{-3}$	$0,105 \cdot 10^{-3}$	$0,56481 \cdot 10^{-3}$
14	24,5161	$0,138 \cdot 10^{-3}$	$0,7423 \cdot 10^{-3}$	$0,1 \cdot 10^{-3}$	$0,53791 \cdot 10^{-3}$
15	24,5250	$0,13 \cdot 10^{-3}$	$0,699288 \cdot 10^{-3}$	$0,96 \cdot 10^{-4}$	$0,5164 \cdot 10^{-3}$
16	24,5324	$0,122 \cdot 10^{-3}$	$0,6562 \cdot 10^{-3}$	$0,95 \cdot 10^{-4}$	$0,511018 \cdot 10^{-3}$
17	24,5385	$0,117 \cdot 10^{-3}$	$0,629359 \cdot 10^{-3}$	$0,92 \cdot 10^{-4}$	$0,49488 \cdot 10^{-3}$
18	24,5436	$0,113 \cdot 10^{-3}$	$0,6078 \cdot 10^{-3}$	$0,91 \cdot 10^{-4}$	$0,4895 \cdot 10^{-3}$
19	24,5479	$0,108 \cdot 10^{-3}$	$0,5809 \cdot 10^{-3}$	$0,9 \cdot 10^{-4}$	$0,48412 \cdot 10^{-3}$
20	24,5516	$0,105 \cdot 10^{-3}$	$0,5648 \cdot 10^{-3}$	$0,88 \cdot 10^{-4}$	$0,47336 \cdot 10^{-3}$
21	24,5547	$0,102 \cdot 10^{-3}$	$0,54867 \cdot 10^{-3}$	$0,87 \cdot 10^{-4}$	$0,467985 \cdot 10^{-3}$

TABLEAU 7

Niveaux	Seuils (eV)	Maximums (cm^{-1})	Coefficients
2^1P	21,2163	<u>0,44506</u>	0,90076
2^3S	19,818	0,2128	1,34734
2^3P	20,9624	0,19779	0,824033
3^1P	23,0852	0,10732509	0,273888
<u>2^1S</u>	<u>20,6141</u>	<u>$0,568 \cdot 10^{-1}$</u>	<u>$0,568 \cdot 10^{-1}$</u>
3^3P	23,0053	$0,47357 \cdot 10^{-1}$	0,197449
4^1P	23,7402	$0,4374 \cdot 10^{-1}$	0,1138989
3^3S	22,7167	$0,34777 \cdot 10^{-1}$	0,20404
5^1P	24,044	$0,21388 \cdot 10^{-1}$	0,059
4^3P	23,7061	$0,184466 \cdot 10^{-1}$	0,0831329
<u>3^1S</u>	<u>22,9185</u>	<u>$0,171934 \cdot 10^{-1}$</u>	<u>$0,171934 \cdot 10^{-1}$</u>
6^1P	24,2092	$0,133 \cdot 10^{-1}$	0,034923
4^3S	23,5922	$0,11566 \cdot 10^{-1}$	0,071806
7^1P	24,3089	$1 \cdot 10^{-2}$	0,026475
5^3P	24,0264	$0,9248537 \cdot 10^{-2}$	0,036159
<u>4^1S</u>	<u>23,6718</u>	<u>$0,851852 \cdot 10^{-2}$</u>	<u>$0,851852 \cdot 10^{-2}$</u>
8^1P	24,3736	$0,82 \cdot 10^{-2}$	0,023343
9^1P	24,4180	$0,72 \cdot 10^{-2}$	0,01923347
10^1P	24,4498	$0,66 \cdot 10^{-2}$	0,017676
11^1P	24,4734	$0,62 \cdot 10^{-2}$	0,01685649
12^1P	24,4913	$0,58 \cdot 10^{-2}$	0,01558676
6^3P	24,1990	$0,57 \cdot 10^{-2}$	0,03066
13^1P	24,5052	$0,56 \cdot 10^{-2}$	0,01506639
14^1P	24,5163	$0,54 \cdot 10^{-2}$	0,01747
5^3S	23,9701	$0,53757 \cdot 10^{-2}$	0,031851
15^1P	24,5252	$0,53 \cdot 10^{-2}$	0,01428257
16^1P	24,5325	$0,51 \cdot 10^{-2}$	0,01375
17^1P	24,5385	$0,505 \cdot 10^{-2}$	0,0136236
18^1P	24,5436	$0,5 \cdot 10^{-2}$	0,013494

Valeurs d'OCHKUR (excepté les grandeurs soulignées).

TABLEAU 7 (SUITE)

Niveaux	Seuils (eV)	Maximums (cm ⁻¹)	Coefficients
19 ¹ P	24,5479	0,49.10 ⁻²	0,013229
20 ¹ P	24,5516	0,48.10 ⁻²	0,012963
7 ³ P	24,3025	0,39.10 ⁻²	0,020978
3 ¹ D	23,0723	0,3464767.10 ⁻²	0,34647.10 ⁻²
8 ³ P	24,3693	0,33.10 ⁻²	0,01775
5 ¹ S	24,0094	0,320422.10 ⁻²	0,320422.10 ⁻²
6 ³ S	24,1672	0,31.10 ⁻²	0,016675
9 ³ P	24,4150	0,26.10 ⁻²	0,013985
10 ³ P	24,4476	0,25.10 ⁻²	0,0134478
11 ³ P	24,4717	0,23.10 ⁻²	0,012372
12 ³ P	24,49	0,22.10 ⁻²	0,011834
7 ³ S	24,2827	0,21.10 ⁻²	0,011296
13 ³ P	24,5042	0,203.10 ⁻²	0,010919
14 ³ P	24,5155	0,2.10 ⁻²	0,010758
15 ³ P	24,5246	0,19.10 ⁻²	0,01022037
16 ³ P	24,5320	0,185.10 ⁻²	0,99514.10 ⁻²
4 ¹ D	23,7347	0,18266.10 ⁻²	0,18266.10 ⁻²
17 ³ P	24,5381	0,18.10 ⁻²	0,96824.10 ⁻²
18 ³ P	24,5433	0,178.10 ⁻²	0,95748.10 ⁻²
19 ³ P	24,5476	0,175.10 ⁻²	0,94135.10 ⁻²
20 ³ P	24,5513	0,17.10 ⁻²	0,91445.10 ⁻²
21 ³ P	24,5545	0,17.10 ⁻²	0,91445.10 ⁻²
22 ³ P	24,5573	0,17.10 ⁻²	0,91445.10 ⁻²
8 ³ S	24,3563	0,165.10 ⁻²	0,88755.10 ⁻²
6 ¹ S	24,1893	0,14067.10 ⁻²	0,14067.10 ⁻²
9 ³ S	24,4059	0,13.10 ⁻²	0,699288.10 ⁻²
3 ³ D	23,0719	0,129.10 ⁻²	0,496638.10 ⁻²
10 ³ S	24,4412	0,11.10 ⁻²	0,591705.10 ⁻²
5 ¹ D	24,041	0,100941.10 ⁻²	0,10094.10 ⁻²
11 ³ S	24,4668	0,1.10 ⁻²	0,53791.10 ⁻²
12 ³ S	24,4862	0,92.10 ⁻³	0,49488.10 ⁻²
13 ³ S	24,5012	0,84.10 ⁻³	0,451848.10 ⁻²
14 ³ S	24,5131	0,83.10 ⁻³	0,446468.10 ⁻²

TABLEAU 7 (SUITE)

Niveaux	Seuils (eV)	Maximums (cm ⁻¹)	Coefficients
15 ³ S	24,5250	0,78.10 ⁻³	0,41957.10 ⁻²
4 ³ D	23,7343	0,6968.10 ⁻³	0,27794.10 ⁻²
6 ¹ D	24,2074	0,68.10 ⁻³	0,68.10 ⁻³
7 ¹ S	24,2964	0,54706.10 ⁻³	0,54706.10 ⁻³
7 ¹ D	24,3077	0,54.10 ⁻³	0,54.10 ⁻³
8 ¹ D	24,3729	0,46.10 ⁻³	0,46.10 ⁻³
9 ¹ D	24,4175	0,41.10 ⁻³	0,41.10 ⁻³
5 ³ D	24,0408	0,385.10 ⁻³	0,44065.10 ⁻³
10 ¹ D	24,4494	0,38.10 ⁻³	0,38.10 ⁻³
8 ¹ S	24,3654	0,36.10 ⁻³	0,36.10 ⁻³
11 ¹ D	24,4730	0,35.10 ⁻³	0,35.10 ⁻³
12 ¹ D	24,4910	0,33.10 ⁻³	0,33.10 ⁻³
6 ³ D	24,2073	0,255.10 ⁻³	0,137168.10 ⁻²
7 ³ D	24,3077	0,195.10 ⁻³	0,104893.10 ⁻²
8 ³ D	24,3728	0,16.10 ⁻³	0,860663.10 ⁻³
9 ³ D	24,4175	0,14.10 ⁻³	0,75308.10 ⁻³
10 ³ D	24,4494	0,128.10 ⁻³	0,68853.10 ⁻³
11 ³ D	24,4731	0,118.10 ⁻³	0,634738.10 ⁻³
12 ³ D	24,4910	0,11.10 ⁻³	0,5917.10 ⁻³
13 ³ D	24,5050	0,105.10 ⁻³	0,56481.10 ⁻³
14 ³ D	24,5161	0,1.10 ⁻³	0,53791.10 ⁻³
15 ³ D	24,5250	0,96.10 ⁻⁴	0,5164.10 ⁻³
16 ³ D	24,5324	0,95.10 ⁻⁴	0,511018.10 ⁻³
17 ³ D	24,5385	0,92.10 ⁻⁴	0,49488.10 ⁻³
18 ³ D	24,5436	0,91.10 ⁻⁴	0,4895.10 ⁻³
19 ³ D	24,5479	0,9.10 ⁻⁴	0,48412.10 ⁻³
20 ³ D	24,5516	0,88.10 ⁻⁴	0,47336.10 ⁻³
21 ³ D	24,5547	0,87.10 ⁻⁴	0,467985.10 ⁻³
9 ¹ S	24,4122	0,23.10 ⁻³	0,23.10 ⁻³
10 ¹ S	24,4456	0,18.10 ⁻³	0,18.10 ⁻³
12 ¹ S	24,4887	0,12.10 ⁻³	0,12.10 ⁻³
13 ¹ S	24,5043	0,11.10 ⁻³	0,11.10 ⁻³

TABLEAU 8

Niveaux	Seuils (eV)	Maximums (cm ⁻¹)	Coefficients
2 ¹ P	21,2163	0,47061	0,949
3 ¹ P	23,0852	0,114692	0,2738
2 ³ S	19,818	0,586.10 ⁻¹	0,3157
2 ¹ S	20,6141	0,0722	0,0722
4 ¹ P	23,7402	0,5199.10 ⁻¹	0,1313
2 ³ P	20,9624	0,41489.10 ⁻¹	0,20508
3 ³ S	21,7167	0,3097.10 ⁻¹	0,1532
3 ³ P	23,0053	0,23876.10 ⁻¹	0,118
5 ¹ P	24,044	0,23535.10 ⁻¹	0,0609
3 ¹ S	22,9185	0,0158	0,0158
3 ¹ D	23,0723	0,0115	0,0115
6 ¹ P	24,2092	0,11786.10 ⁻¹	0,03094
4 ³ P	23,7061	0,10922.10 ⁻¹	0,058
4 ³ S	23,5922	0,953.10 ⁻²	0,0512
3 ³ D	23,0719	0,8831.10 ⁻²	0,04751
4 ¹ S	23,6718	0,0078	0,0078
7 ¹ P	24,3089	0,75.10 ⁻²	0,1985.10 ⁻¹
8 ¹ P	24,3736	0,58.10 ⁻²	0,15437.10 ⁻¹
4 ¹ D	24,7345	0,0048	0,0048
9 ¹ P	24,4180	0,47.10 ⁻²	0,12555.10 ⁻¹
10 ¹ P	24,4498	0,41.10 ⁻²	0,1098.10 ⁻¹
5 ³ P	24,0264	0,3951.10 ⁻¹	0,02125
11 ¹ P	24,4734	0,38.10 ⁻²	0,10197.10 ⁻¹
5 ³ S	23,9701	0,3603.10 ⁻²	0,01928
12 ¹ P	24,4913	0,35.10 ⁻²	0,94058.10 ⁻²
4 ³ D	24,7343	0,3253.10 ⁻²	0,01750
5 ¹ S	24,0094	0,00294	0,00294
13 ¹ P	24,5052	0,32.10 ⁻²	0,8609.10 ⁻²
14 ¹ P	24,5163	0,31.10 ⁻²	0,8347.10 ⁻²
15 ¹ P	24,5252	0,31.10 ⁻²	0,8316.10 ⁻²
16 ¹ P	24,5325	0,3.10 ⁻²	0,8052.10 ⁻²

TABLEAU 8 (SUITE)

Niveaux	Seuils (eV)	Maximums (cm^{-1})	Coefficients
17^1P	24,5385	$0,29.10^{-2}$	$0,7788.10^{-2}$
5^1D	24,041	0,002813	0,0026
18^1P	24,5436	$0,28.10^{-2}$	$0,75226.10^{-2}$
19^1P	24,5479	$0,28.10^{-2}$	$0,7559.10^{-2}$
20^1P	24,5516	$0,27.10^{-2}$	$0,729.10^{-2}$
5^3D	24,0408	$0,19176.10^{-2}$	0,01031
6^3P	24,1990	$0,155.10^{-2}$	$0,8337.10^{-2}$
6^1S	24,1893	0,00129	0,00129
6^1D	24,2074	0,00129	0,00129
6^3D	24,2073	$0,1162.10^{-2}$	0,00625
6^3S	24,1672	$0,11618.10^{-2}$	0,00625
7^3P	24,3025	$0,96.10^{-3}$	$0,51639.10^{-2}$
8^3P	24,3693	$0,7.10^{-3}$	$0,3565.10^{-2}$
7^3D	24,3077	$0,69737.10^{-3}$	0,00375
7^1D	24,3077	0,0036	0,0036
9^3P	24,4150	$0,58.10^{-3}$	$0,31199.10^{-2}$
7^1S	24,2964	0,0005	0,0005
10^3P	24,4476	$0,49.10^{-3}$	$0,2635.10^{-2}$
11^3P	24,4717	$0,43.10^{-3}$	$0,2313.10^{-2}$
8^1D	24,3729	$0,41.10^{-3}$	$0,41.10^{-3}$
8^3D	24,3728	$0,41.10^{-3}$	$0,2205.10^{-2}$
12^3P	24,49	$0,39.10^{-3}$	$0,2097.10^{-2}$
13^3P	24,5042	$0,37.10^{-3}$	$0,199.10^{-2}$
8^1S	24,3654	$0,36.10^{-3}$	$0,36.10^{-3}$
14^3P	24,5155	$0,36.10^{-3}$	$0,1936.10^{-2}$
7^3S	24,2827	$0,35.10^{-3}$	$0,18827.10^{-2}$
15^3P	24,5246	$0,34.10^{-3}$	$0,18289.10^{-2}$
16^3P	24,5320	$0,33.10^{-3}$	$0,1775.10^{-2}$
17^3P	24,5381	$0,32.10^{-3}$	$0,1721.10^{-2}$
18^3P	24,5433	$0,31.10^{-3}$	$0,1667.10^{-2}$
19^3P	24,5476	$0,3.10^{-3}$	$0,16137.10^{-2}$

TABLEAU B (SUITE)

Niveaux	Seuils (eV)	Maximums (cm ⁻¹)	Coefficients
20 ³ P	24,5513	0,3.10 ⁻³	0,16137.10 ⁻²
21 ³ P	24,5545	0,3.10 ⁻³	0,16137.10 ⁻²
22 ³ P	24,5573	0,3.10 ⁻³	0,16137.10 ⁻²
9 ¹ D	24,4175	0,295.10 ⁻³	0,295.10 ⁻³
9 ³ D	24,4175	0,29.10 ⁻³	0,15599.10 ⁻²
10 ¹ D	24,4494	0,23.10 ⁻³	0,23.10 ⁻³
10 ³ D	24,4494	0,23.10 ⁻³	0,1237.10 ⁻²
9 ¹ S	24,4122	0,23.10 ⁻³	0,23.10 ⁻³
11 ¹ D	24,4730	0,19.10 ⁻³	0,19.10 ⁻³
11 ³ D	24,4731	0,19.10 ⁻³	0,15599.10 ⁻²
10 ¹ S	24,4456	0,18.10 ⁻³	0,18.10 ⁻³
12 ¹ D	24,4910	0,17.10 ⁻³	0,17.10 ⁻³
8 ³ S	24,3563	0,17.10 ⁻³	0,9144.10 ⁻³
12 ³ D	24,4910	0,165.10 ⁻³	0,88755.10 ⁻³
13 ³ D	24,5050	0,15.10 ⁻³	0,80687.10 ⁻³
14 ³ D	24,5161	0,138.10 ⁻³	0,7423.10 ⁻³
15 ³ D	24,5250	0,13.10 ⁻³	0,699288.10 ⁻³
16 ³ D	24,5324	0,122.10 ⁻³	0,6562.10 ⁻³
12 ¹ S	24,4887	0,12.10 ⁻³	0,12.10 ⁻³
17 ³ D	24,5385	0,117.10 ⁻³	0,629359.10 ⁻³
18 ³ D	24,5436	0,113.10 ⁻³	0,6078.10 ⁻³
13 ¹ S	24,5043	0,11.10 ⁻³	0,11.10 ⁻³
9 ³ S	24,4059	0,11.10 ⁻³	0,5917.10 ⁻³
19 ³ D	24,5479	0,108.10 ⁻³	0,5809.10 ⁻³
20 ³ D	24,5516	0,105.10 ⁻³	0,5648.10 ⁻³
21 ³ D	24,5547	0,102.10 ⁻³	0,54867.10 ⁻³
10 ³ S	24,4412	0,74.10 ⁻⁴	0,398.10 ⁻³
11 ³ S	24,4648	0,56.10 ⁻⁴	0,30123.10 ⁻³
12 ³ S	24,4862	0,45.10 ⁻⁴	0,24206.10 ⁻³
13 ³ S	24,5012	0,4.10 ⁻⁴	0,21516.10 ⁻³
14 ³ S	24,5131	0,36.10 ⁻⁴	0,193649.10 ⁻³
15 ³ S	24,5250	0,31.10 ⁻⁴	0,166753.10 ⁻³

C H A P I T R E I I

S E C T I O N S E F F I C A C E S D U T Y P E I I

XXXXX

La figure 6 montre que au-dessus de deux ou trois électron-volts la décroissance de la section efficace de transfert pour la quantité de mouvement est sensiblement exponentielle et cela jusqu'à une valeur assez élevée de l'ordre de 90 électron-volts. Comme, dans ce travail, les calculs sont en général effectués pour des valeurs élevées de E/p , on conçoit que c'est dans cette zone exponentiellement décroissante que les valeurs de la section efficace doivent être respectées avec le plus de soin. On obtient ainsi une relation simple en étendant cette zone à toutes les valeurs de l'énergie et en posant :

$$N'_0 \sigma_0(\epsilon) = 26 \exp(-0,04 \cdot \epsilon) \sim N'_0 \sigma_1(\epsilon) \quad (6)$$

de manière à ajuster les valeurs au mieux de la courbe de la figure 6.

En ce qui concerne les sections efficaces de collision inélastique, j'ai adopté la représentation proposée par ITOH et MUSHA (It-1) dont l'évaluation sur ordinateur est particulièrement aisée. Elle consiste en un modèle à trois niveaux à savoir deux niveaux d'excitation et le premier niveau d'ionisation. Plus précisément :

- le premier niveau métastable (2^3S) de seuil 19,8 eV ;
- un niveau fictif correspondant à une moyenne arithmétique sur les niveaux 2^1S , 2^3P , 2^1P , 3^1P et qui conduit à un seuil de 21,45 eV ;
- le premier niveau d'ionisation de seuil 24,46 eV.

Les variations des sections efficaces correspondantes sont alors approximées par une expression de la forme :

$$\sigma_{0,j}(\epsilon) = \frac{A_j (\epsilon - \epsilon_j)}{B_j + (\epsilon - \epsilon_j)^2}$$

les paramètres A_j et B_j ayant pour valeur :

ϵ_j	A_j	B_j
19,8	0,109	0,25
21,45	68,8	1850
24,46	172	4900

Le comportement de ces sections efficaces est représenté sur les figures 40 et 41.

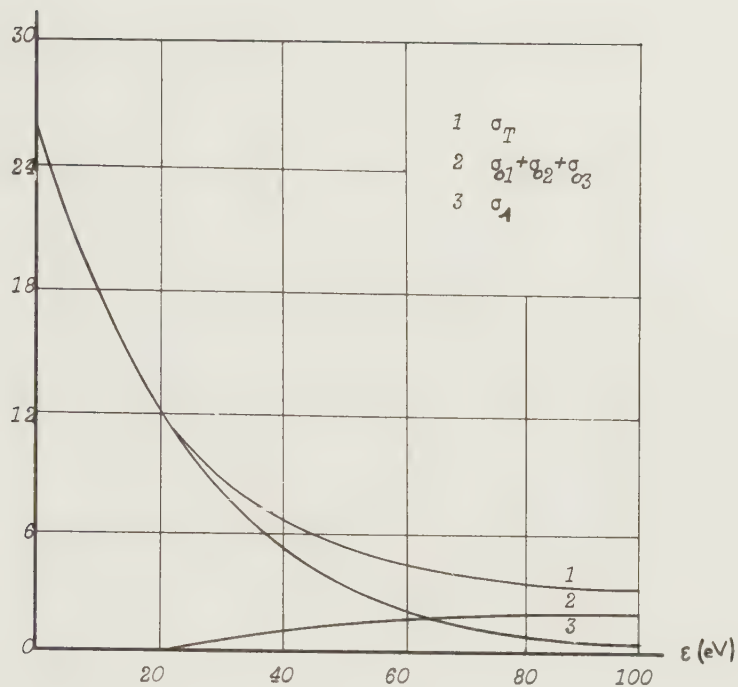


FIGURE 40

SECTIONS EFFICACES TOTALES, ELASTIQUES ET SOMME DES SECTIONS EFFICACES INELASTIQUES.

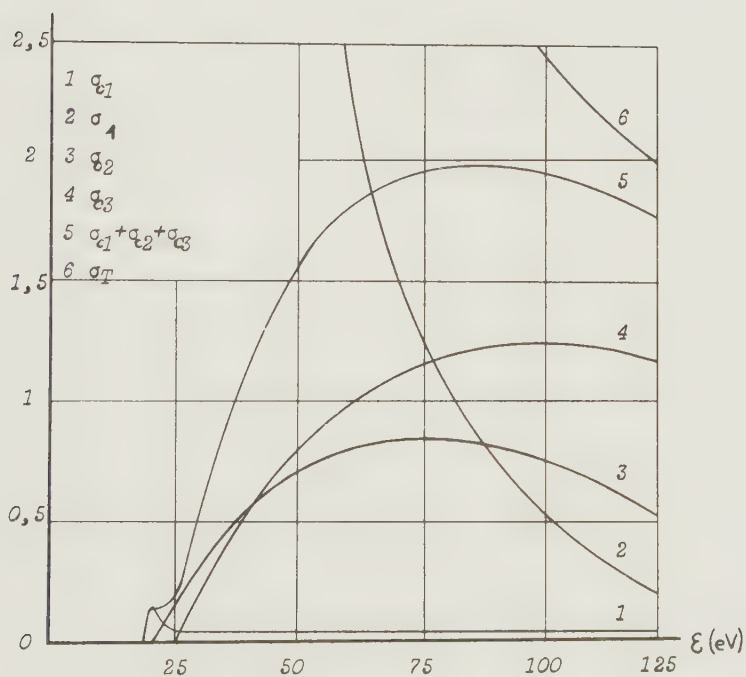


FIGURE 41

SECTIONS EFFICACES TOTALES, ELASTIQUES, INELASTIQUES ET SOMME DES SECTIONS EFFICACES INELASTIQUES.

CONCLUSION

XXXX

L'étude qui précède m'a permis d'établir ou de développer un certain nombre de méthodes adaptées à la description microscopique d'un gaz faiblement ionisé. J'ai pu ainsi obtenir de nombreuses informations sur le comportement des grandeurs macroscopiques dans une décharge stationnaire ou instationnaire, homogène ou hétérogène ainsi que sur la structure des fonctions de distribution associées. Malgré ce caractère très général, on conçoit clairement qu'un travail de cet ordre pose toujours en fait beaucoup plus de problèmes qu'il n'en résoud et que de nombreuses questions demeurent encore en suspend. Ainsi, en ce qui concerne l'étude d'un milieu homogène, un important travail de résolution numérique doit être encore envisagé afin d'exploiter pleinement la méthode qui est proposée pour les hautes valeurs du rapport champ électrique sur pression. De la même manière, dans le cas du milieu hétérogène, il conviendrait d'utiliser les résultats obtenus relatifs aux fonctions de distribution pour déterminer le comportement spatial des principales grandeurs macroscopiques.

D'autres projets, plus lointains, peuvent également être envisagés : étude d'un milieu homogène à très faible valeur du rapport champ électrique sur pression pour un gaz moléculaire, par une méthode du type Grad, étude d'un milieu hétérogène à bas E/P par une méthode de perturbation, étude du comportement microscopique des ions en adoptant à nouveau une méthode du type Grad, etc... D'autres situations, plus complexes, peuvent également être abordées à l'aide des techniques que j'ai développées : les lasers par exemple, lorsque la distribution des molécules n'est plus isotrope, les milieux ionisés de l'ionosphère ou de la haute atmosphère, les ondes de choc.

Ainsi, bien qu'au départ spécifique d'une décharge du type Townsend, le travail que j'ai réalisé dans cette thèse semble pouvoir s'adapter à des situations très diverses des milieux faiblement ionisés.

B I B L I O G R A P H I E

XXXX

- (Ba-1) - BAYET (M.) :
Physique Electronique des gaz et des solides.
Masson, PARIS, (1958).
- (Ba-2) - BAYET (M.), DELCROIX (J. L.) et DENISSE (J. F.) :
J. Phys., 15, 795, (1954).
- (Ba-3) - BAYET (M.), DELCROIX (J. L.) et DENISSE (J. F.) :
J. Phys., 16, 274, (1955).
- (Ba-4) - BAYET (M.), DELCROIX (J. L.) et DENISSE (J. F.) :
J. Phys., 17, 923, (1956).
- (Ba-5) - BARBIERE (D.) :
Phys. Rev., 84, 653, (1951).
- (Be-1) - BEKIARIAN (A.), DELCROIX (J. L.) et RICATEAU (P.) :
C. R. Acad. Sci., 265, 238, (1967).
- (Be-2) - BELLMAN (R.) et HARRIS (T. E.) :
Proc. Nation. Acad. Sci., 34, 601, (1948).
- (Be-3) - BERNSTEIN (I.B.) :
Dans Advances in Plasma Physics, t3,
Interscience Publishers, 1969.
- (Bo-1) - BOGOLIUBOV (N.) et MITROPOLSKI (I.) :
Les méthodes asymptotiques en théorie des oscillations non linéaires.
Gauthier-Villars, PARIS, (1962).
- (Br-1) - BRAGLIA (G. L.) :
Lett. Nuovo Cimento, 1, 595, (1969).
- (Br-2) - BRAGLIA (G. L.) :
Nuovo Cimento, 70, 169, (1970).
- (Br-3) - BRODE (R. B.) :
Phys. Rev., 25, 636, (1925).
- (Ca-1) - CALDIROLA (P.), DE BARBIERI (O.) et MAROLI (C.) :
Nuovo Cimento, 42B, 266, (1966).
- (Ca-2) - CARLSON (B. G.) :
Proc. Symp. Appl. Math., 11, 219.

- (Ca-3) - CARLSON (B. G.) :
Solution of the Transport equation by Sn approximation.
LA-1891, LOS ALAMOS, 1965.
- (Ch-1) - CHANIN (L. M.) et RORK (G. D.) :
Phys. Rev., 132, 2547, (1963).
- (Ch-2) - CHAPMAN (S.) et COWLING (T.G.) :
The mathematical theory of non uniform gases.
Cambridge University Press, NEW YORK, (1970).
- (Ch-3) - CHATELLARD (P.) :
Thèse de Spécialité, TOULOUSE, n° d'ordre 1084, (1971).
- (Co-1) - COOKSON (A. H.) et LEWIS (T. J.) :
Brit. J. Appl. Phys., 17, 1473, (1966).
- (Cr-1) - CROMPTON (A. V.), ELFORD (M. T.) et JORY (R. L.) :
Austral. J. Phys. 20, 369, (1967).
- (Da-1) - DAHLQUIST (J. A.) :
Phys. Rev., 128, 1988, (1962).
- (Da-2) - DAVISON (B.) :
Neutron Transport Theory.
Clarendon Press, OXFORD, (1958).
- (De-1) - DELCROIX (J. L.) :
Physique des Plasmas, t2.
Dunod, PARIS, (1966).
- (De-2) - DESLOGE (E. A.) :
Statistical Physics.
Holt, Rinehart and Winston, NEW YORK, (1966).
- (Do-1) - DOLDER (K. T.), HARRISON (M. F. A.) et THONEMANN (P. C.) :
Proc. Roy. Soc., 264, 367, (1961).
- (Dr-1) - DRAWIN (H. W.) :
Rapport EUR-CEA-FC-252, (1964).
- (Du-1) - DURAND (E.) :
Solutions Numériques des Equations Algébriques, tI,
Masson, PARIS, (1971).
- (Fa-1) - FAIN (V. M.) :
Soviet Physics, J. E. T. P., 1, 205, (1955).
- (Fe-1) - FESHCHENKO (S. F.), SHKIL (N. I.) et NIKOLENKO (L. D.) :
Asymptotic Methods in the Theory of Linear Differential Equations.
Elsevier, (1967).
- (Fo-1) - FOX (R. L.) :
Phys. Rev., 168, 1, (1968).
- (Fr-1) - FROST (L. S.) et PHELPS (R. V.) :
Phys. Rev., 127, 1621, (1962).
- (Fu-1) - FURRY (W. H.) :
Phys. Rev., 75, 833, (1949).
- (Ge-1) - GERWIN (R.) :
Physica, 49, 565, (1970).
- (Go-1) - GOLDEN (D. E.) et BANDEL (H. W.) :
Phys. Rev., 138, 14, (1965).
- (Go-2) - GOLDSTEIN (C. M.) :
Rapport N. A. S. A. TND-2959, (1965).

- (Go-3) - GOLDSTEIN (C. M.) :
J. appl. Phys., 38, 2977, (1967).
- (Go-4) - GOODRICH (M.) :
Phys. Rev., 52, 259, (1937).
- (Gr-1) - GRAD (H.) :
dans Handbuch der Physik, t 12.
Springer-Verlag, BERLIN, (1957).
- (He-1) - HEYLEN (A. E. D.) et LEWIS (L.) :
Proc. Roy. Soc., 271A, 531, (1963).
- (Ho-1) - HOLSTEIN (T.) :
Phys. Rev., 70, 367, (1946).
- (It-1) - ITOH (T.) et MUSHI (T.) :
J. Phys. Soc. Jap., 15, 1675, (1960).
- (Ja-1) - JANCEL (R.) :
Sup. Nuovo Cimento, 6, 1329, (1968).
- (Ka-1) - KAGAN (Y.) et LYAGUSHENKO (R. I.) :
Soviet Physics, Technical Physics, 9, 627, (1964).
- (Ke-1) - KELLER (H. B.) :
J. Soc. Industr. Appl. Math.,
- (Ke-2) - KELLER (H. B.) et WENDROFF (B.) :
Communic. pure appl. Math., 10, 567, (1957).
- (Ki-1) - KIEFFER (L. J.) et DUNN (G. H.) :
Rev. Mod. Phys., 38, 1, (1966).
- (Ko-1) - KOVRIZHNIKOV (L. M.) :
Soviet Physics, J. E.T. P., 10, 347, (1960).
- (Ku-1) - KUMAR (K.) :
Ann. Phys., 37, 113, (1966).
- (La-1) - LABAHN (R. W.) et CALLAWAY (J.) :
Phys. Rev., 135, 1539, (1964).
- (La-2) - LABAHN (R. W.) et CALLAWAY (J.) :
Phys. Rev., 147, 28, (1966).
- (La-3) - LABORIE (P.), ROCARD (J. M.) et REES (J. A.) :
Sections efficaces électroniques, coefficients macroscopiques, tI.
Dunod, PARIS, (1968).
- (La-4) - LANGER (R. E.) :
Trans. Am. Math. Society, 34, 447, (1932).
- (La-5) - LANGER (R. E.) :
Trans. Am. Math. Society, 36, 90, (1934).
- (La-6) - LANGER (R. E.) :
Trans. Am. Math. Society, 67, 461, (1949).
- (La-7) - LASCAUX (P.) et RAVIART (P. A.) :
Conference on Applications of Numerical Analysis.
Springer-Verlag, (1971).
- (La-8) - LATHROP (K.) et CARLSON (B.) :
J. Comput. Physics, 2, 173, (1967).
- (Le-1) - LEGLER (W. W.) :
Z. Naturf., 160, 253, (1961).

- (Le-2) - LEWIS (T. J.) :
Proc. Roy. Soc., 244A, 166, (1958).
- (Lo-1) - LOEB (L. D.) :
Basic Process of Gaseous Electronics.
Univ. of Calif. Press, (1961).
- (Lo-2) - LO SURDO (C.) :
J. Plasma Physics, 6, 107, (1971).
- (Lo-3) - LOTZ (W.) :
Astrophys. J., 128, 207, (1967).
- (Lo-4) - LOWKE (J. J.) et PARKER (J. H.) :
Phys. Rev., 181, 302, (1969).
- (Lu-1) - LUCAS (J.) :
Int. J. Electronics, 27, 201, (1969).
- (Lu-2) - LUCAS (J.) :
Int. J. Electronics, 28, 463, (1970).
- (Lu-3) - LUCAS (J.) :
Int. J. Electronics, 29, 465, (1970).
- (Ma-1) - MAC CORMACK (F. J.) :
Phys. Rev., 178, 319, (1969).
- (Ma-2) - MARGENAU (H.) :
Phys. Rev., 69, 508, (1946).
- (Ma-3) - MARGENAU (H.) :
Phys. Rev., 73, 297, (1948).
- (Ma-4) - MAROLI (C.) :
Nuovo Cimento, 46B, 208, (1966).
- (Mi-1) - MINTZER (D.) :
The Physics of Fluids, 8, 1076, (1965).
- (Mo-1) - MOISEWITSCH (J. L.) et SMITH (S. J.) :
Rev. Mod. Phys., 40, 238, (1968).
- (Mo-2) - MORSE (P. M.) et ALLIS (W. P.) :
Phys. Rev., 44, 269, (1933).
- (Na-1) - NAZE (J.) :
Thèse de Doctorat, PARIS, (1961).
- (No-1) - NORMAND (C. E.) :
Phys. Rev., 35, 1217, (1930).
- (Oc-1) - OCHKUR (V. I.) :
Opt. i Spektrosk., 19, 274, (1965).
- (On-1) - O'MALLEY (T. F.), SPRUCH (L.) et ROSENBERG (L.) :
Phys. Rev., 125, 1300, (1962).
- (Pa-1) - PARKER (J. H.) :
Phys. Rev., 132, 2096, (1963).
- (Pa-2) - PARKER (J. H.) et LOWKE (J. J.) :
Phys. Rev., 181, 290, (1969).
- (Pa-3) - PATAU (J. P.), BLANC (D.), MATHIEU (J.) et MASON (G.) :
II° Symposium of Microdosimetry.
STRESA, Italy, (1969).

- (Pe-1) - PEYRAUD (N.) :
J. Phys., 28, 147, (1967).
- (Pe-2) - PEYRAUD (N.) :
J. Phys., 29, 201, (1968).
- (Pe-3) - PEYRAUD (N.) :
J. Phys., 29, 997, (1968).
- (Po-1) - POZZOLI (R.) :
Il Nuovo Cimento, 50, 137, (1967).
- (Pu-1) - PU (R. T.) et CHANG (E. S.) :
Phys. Rev., 151, 31, (1966).
- (Ra-1) - RAETHER (H.) :
Electron avalanches and breakdown in gases.
Butterworth, LONDON, (1964).
- (Ra-2) - RAMSAUER (C.) :
Ann. Phys., 66, 576, (1921).
- (Ra-3) - RAMSAUER (C.) et KOLLATH (R.) :
Ann. Phys., 12, 529, (1932).
- (Re-1) - REED (Wm. H.) et LATHROP (K. D.) :
Nuclear Sci. Engin., 41, 237, (1970).
- (Sa-1) - SANSONE (G.) :
Orthogonal Functions.
Interscience Publishers, NEW YORK, (1959).
- (Sh-1) - SHERMAN (B.) :
J. Math. Analysis Applications, 1, 342, (1960).
- (So-1) - SOCKOL (P. M.) :
Flow of Electrons through a Rarefied gas between Plane Parallel Electrodes.
N. A. S. A. TND-3510, (1966).
- (So-2) - SOSHNIKOV (V. N.) et TREKHOV (E. S.) :
Soviet Physics, Technical Physics, 12, 1026, (1968).
- (St-1) - STAKHANOV (J. P.) :
Soviet Physics, Technical Physics, 12, 935, (1968).
- (St-2) - STAKHANOV (J. P.) et SHCHERBININ (P. P.) :
Soviet Physics, Technical Physics, 14, 219, (1969).
- (St-3) - STAKHANOV (J. P.) et SHCHERBININ (P. P.) :
Soviet Physics, Technical Physics, 14, 1205, (1970).
- (St-4) - STUART JOHN (R. M.), MILLER (R. L.) et LIN (C. C.) :
Phys. Rev., 134, 838, (1964).
- (Sw-1) - SWIGERT (P.) et GOLDSTEIN (C. M.) :
Rapport N. A. S. A., TND-4043, (1967).
- (Th-1) - THOMAS (W. R. L.) et THOMAS (R. W. L.) :
J. Phys. B, 2, 562, (1968).
- (Th-2) - THOMAS (W. R. L.) :
J. Phys. B, 2, 551, (1969).
- (Th-3) - THOMSON (J. J.) :
Conduction of Electricity Through Gases.
Clarendon Press, OXFORD, (1928).
- (Tr-1) - TRICOMI (F. G.) :
Integral Equations.
Wiley, NEW YORK, (1957).

- (Va-1) - VARGA (R. S.) :
Matrix Iterative Analysis.
Prentice Hall, (1962).
- (Va-2) - VARNEY (R. W.) :
VII Annual Gaseous Electronics Conference.
NEW YORK, University, (1954).
- (Wa-1) - WALDMANN (L.) :
dans Handbuch der Physik, t12.
Springer-Verlag, BERLIN, (1958).
- (Wa-2) - WANNIER (G. H.) :
Bell. Syst. Teck. J., 32, 170, (1953).
- (We-1) - WENDROFF (B.) :
J. Comput. Physics, 4, 211, (1969).
- (Wi-1) - WILHELM (J.) et WINKLER (R.) :
Brit. Plasma Phys., 8, 405, (1968).
- (Wi-2) - WILHELM (J.) et WINKLER (R.) :
Annalen der Physik, 24, 163, (1970).
- (Wi-3) - WILHELM (J.), WINKLER (P.) et FREITAG (H.) :
Beitr. Plasma Phys., 10, 171, (1970).
- (Wi-4) - WING (G. M.) :
An Introduction to Transport Theory.
Wiley, NEW YORK, (1962).
- (Ya-1) - YARNOLD (G. P.) :
Phil. Mag., 36, 185, (1945).
- (Ya-2) - YARNOLD (G. P.) :
Phil. Mag., 38, 186, (1946).
-

Autorisation de Soutenance accordée

TOULOUSE, le **17 JUIL. 1974**

Le Président
de l'Université PAUL-SABATIER,



A handwritten signature in dark ink, appearing to read "L. Lareng". The signature is fluid and stylized, with a long horizontal stroke at the end.

L. LARENG

